

Wiskunde van A tot D voor het uwo helder en exact

***Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica-perspectief-
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen***

Over dit boek

Het boek behandelt helder en exact de wiskunde van de nieuwste A-,B-,C- en D- stroom van het moderne vwo. Het is bestemd voor studenten van het vwo die zich degelijk willen voorbereiden op hun examen, of voor een academische studie. Ook voor hen die na een eerdere opleiding op vwo- of gelijkwaardig niveau, hun wiskundekennis willen opfrissen en/of uitbreiden met nieuwe onderwerpen.

De geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter verduidelijking van de direct eraan voorafgaande theorie. Vooral daardoor kunt u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof eigen maken en raakt u niet gedemotiveerd omdat 'het allemaal niet opschiet' vanwege de vele uitgebreide en tijdrovende opgaven zoals die, natuurlijk terecht, in alle bestaande methoden en lesboeken staan, want 'Wiskunde Leren, is wiskunde doen' volgens Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de Mozart van de Wiskunde.

Maar dit boek is meer 'naslagwerk en vademecum', dan 'leer- en sommenboek' en is daarom via een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, duidelijk gerubriceerd, zodat u gemakkelijk de onderwerpen terugvindt waarin u geïnteresseerd bent.

Daar waar bewijzen van stellingen of afleidingen van formules wat saai of triviaal zouden overkomen na de direct eraan voorafgaande, is een kleiner lettertype gebruikt, ten teken dat ze voor het begrip zelf verder van ondergeschikt belang zijn.

Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR), die na de in onbruik geraakte logaritmetafel, gonio-tabellen, rekenliniaal, ... , onmisbaar werd in de wiskunde, wordt in dit boek, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen min of meer bij toeval voor de TI-83 (vrijwel identiek met de TI-84) van 'Texas Instruments'. Die van 'Casio' is overigens even goed bruikbaar.



Over de auteur

Wim Gronloh, geboren in Amsterdam, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica). Schreef in 1998 de wiskunde methode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en havo/vwo.

Bij deze nieuwe uitgave

Dit boek is een nieuwe druk en herziening van de voorgaande versie 'Wiskunde van A tot D voor het vwo, helder en exact' Behoudens enkele kleine verbeteringen in tekst en enkele figuren is deze druk geheel gelijk aan de tweede druk van deze uitgave. Hopelijk zal ook deze aan uw verwachtingen mogen voldoen.

Wim Gronloh
e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl
Bussum, 2018

Inhoud

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN	1- 42
1. Het begrip functie	1
2. Lineaire functies	2
3. Kwadratische functies	5
a. Vierkantsvergelijking	7
b. Ontbinden van kwadratische functies	7
4. Machtsfuncties	9
a. Grafieken	10
b. Transformaties	11
- Transformaties door translatie	11
- Transformaties door vermenigvuldiging	13
- Transformaties van wortelvormen	14
5. Exponentiële functies	15
- Exponentiële groei	16
6. Gebroken rationale functies	18
7. Grafieken van exponentiële functies	20
8. Logaritmische functies	21
a. logaritme van een getal	21
b. Eigenschappen van logaritmen	22
c. Inverse functies	22
9. Goniometrische functies	24
a. Definities in de eenheidscirkel	24
b. De radaal	25
c. Herleidingformules	25
- sinus en cosinus van som en verschil	26
- verdubbeling- en halveringsformules	27
- formules van Simpson	27
d. Sinus- en cosinusregel	28
- sinusregel	28
- cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras')	29
10. Periodieke functies	30
a. Sinusfunctie	30
b. Cosinusfunctie	32
c. Tangensfunctie	33
d. Exacte standaardwaarden van sinus x en cosinus x .	34
e. Sinusoïden	35

IV

11. Limieten en continuïteit van functies	37
a. Continuïteit van een functie	37
b. Rekenregels voor limieten	38
c. Rechter- en linkerlimiet	39
d. Existentie van limieten	39
e. Opgaven	41
II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN	43- 60
1. Gelijkheden en ongelijkheden	43
2. Oplossen van vergelijkingen	45
a. Lineaire stelsels	45
b. Tweedegraads vergelijkingen	47
- ontbinden in factoren	48
- kwadraatafsplitsing	49
- de abc -formule	49
c. Hogeregraads vergelijkingen	50
- de vergelijking $x^3 = 1$	51
- de vergelijking $x^3 = -1$	52
d. Exponentiële vergelijkingen	52
e. Logaritmische vergelijkingen	54
f. Goniometrische vergelijkingen	57
- $\sin A = p, \cos A = p$	57
- $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$	58- 59
- $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$	59
III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES	61-78
1. Groeisnelheid	61
2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie	62
3. Differentieerbaarheid en continuïteit	63
4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden	64
a. Stijgend en dalende functies	64
b. Convexe en concave kromming	65
c. Extreme waarden	66
- voorwaarden voor een lokaal extreem	66
d. Buigpunten	67
5. Regels bij het differentiëren	68
a. Somregel	68
b. Productregel	68
c. Quotiëntregel	69
d. Factorregel	69
6. Afgeleiden van elementaire functies	70
a. Machtsfuncties	70

b. Goniometrische functies	71
- afgeleide van sinus x en cosinus x	72
- afgeleide van tangens x	72
c. Afgeleiden van e -machten	73
d. De kettingregel	73
e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies	74
- exponentiële functies	74
- logaritmische functies	75
f. Afgeleiden van samengestelde functies	76
7. Praktische toepassingen van differentiaalrekening	77
IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES	79- 96
1. Oppervlakte en integraal	79
2. Integreren en stamprimitieven	81
a. Integreren	81
b. Stamprimitieven	82
c. Rekenregels bij het integreren	83
3. Substitutiemethode en partieel integreren	86
a. Bepaalde- en onbepaalde integralen	86
b. Substitutiemethode	86
c. Partiële integratie	87
4. Toepassingen van de integraalrekening in de meetkunde	88
a. Lengte van een kromme	88
b. Oppervlakte tussen twee krommen	89
c. Inhoud van een omwentelingslichaam	89
- inhoud van een cilinder	90
- inhoud van een kegel	90
- inhoud van een bol	90
- inhoud van een omwentelingsellipsoïde	91
d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam	94
- oppervlakte van een bol	95
- oppervlakte van een paraboloid	95
- oppervlakte van een hyperboloid	96
V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING	97- 114
1. Driehoek van Pascal	97
- Binomium van Newton	99
- Routes in een rooster	100
2. Kansexperimenten	101
a. Somregel	101
b. Productregel	101
c. Complementregel	102

VI

3. Permutaties, variaties en combinaties	103
a. Permutaties	103
b. Variaties	103
c. Combinaties	104
4. Onderscheid bij kansproblemen	105
a. Trekkingen zonder terugleggen	105
b. Trekkingen met terugleggen	106
c. Binomiale kansverdelingen	107
5. Verwachtingswaarden	110
- Somregel voor verwachtingswaarden	113
VI. STATISTIEK EN KANSREKENING	115- 140
1. Centrummaten	115
a. Gemiddelde	115
b. Modus	115
c. Mediaan	115
d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot	116
2. Klassenindelingen	116
a. Klassenmidden	116
b. Modale klasse	117
3. Frequentiepolygonen	117
a. Cumulatieve frequenties	117
b. Relatieve cumulatieve frequenties	118
4. Beelddiagrammen	119
- geclusterd staafdiagram	119
- histogram	121
- reepdiagram	121
- gecombineerd beelddiagram	122
5. Spreidingsmaten	123
a. Standaardafwijking	124
- berekening van de standaardafwijking	124
- betekenis van de standaardafwijking	124
- standaardafwijking van een frequentieverdeling	125
- standaardafwijking van een kansverdeling	127
b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen	128
- verwachtingswaarde	128
- variantie	129
- standaardafwijking	129
- de wortel- n wet	133
6. Normale verdelingen	134
a. Berekening van standaardscores	136
b. Standaardiseren	137

VII . PLANIMETRIE	141- 176
1. Driehoeken	141
a. Stelling van Pythagoras	142
b. Goniometrische verhoudingen	142
c. Zwaartelijnen	143
d. Bissectrices	144
e. Hoogtelijnen	145
f. Middelloodlijnen	145
g. Rechte van Euler	146
2. Vierhoeken	146
- koordenvierhoek	147
3. Veelhoeken	147
a. De 'Guldensnede' en het getal phi	148
b. Regelmatige tienhoek	149
c. Regelmatige vijfhoek	150
d. Het pentagram	151
e. Rij van Fibonacci	151
4. De cirkel	152
a. Hoeken in een cirkel	152
- middelpuntshoek	152
- omtrekshoek	153
- binnenhoek van een cirkel	153
- buitenhoek van een cirkel	154
- hoek tussen een koorde en een raaklijn	154
b. Cirkels om, in, en aan een driehoek	155
- omgeschreven cirkel	155
- ingeschreven cirkel	155
- aangeschreven cirkels	156
- betrekking tussen om, in, en aangeschreven cirkels	157
c. Omtrek van een cirkel	158
- Getal van Archimedes en pi	159
d. Oppervlakte van een cirkel	161
e. Meetkundige vraagstukken	161
5. Kegelsneden	164
a. De cirkel	165
b. De ellips	165
c. De parabool	166
- standaardparabool	167
d. De hyperbool	168
6. Transformaties	169
a. Assentransformaties	170
- algemene vergelijking van de cirkel	170
- de hyperbool $x.y = 1$	170
b. Vermenigvuldiging van figuren	171
- vermenigvuldiging ten opzichte van een punt	171

VIII

- vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn	172
- oppervlakte en omtrek van een ellips	173
c. Poolcoördinaten	174
- Spiraal van Archimedes	175
- De Cardioïde	176
VIII. STEREOMETRIE	177- 196
1. Meetkundige lichamen	177
a. Het prisma	177
b. De piramide	177
c. De cilinder	178
d. De kegel	178
e. De bol	178
2. Oppervlakte en inhoud van lichamen	178
a. Oppervlakte van prisma en piramide	178
b. Inhoud van een prisma	179
c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder	179
d. Inhoud van een piramide	180
e. Inhoud en oppervlakte van een kegel	180
- oppervlakte van een afgeknotte kegel	181
f. Inhoud van een bol volgens Archimedes	182
3. Oppervlakte en inhoud van boldelen	183
a. Bolsegment	184
b. Bolschijf	184
c. Bolsector	186
4. Regelmatige vlakvullingen	187
a. regelmatige patronen	187
b. halfregelmatige patronen	188
5. Veelvlakken	188
a. Platonische veelvlakken	189
- dualiteit en symmetrie	191
b. Archimedische veelvlakken	192
- mogelijke configuraties	192
- knooppunten van de derde orde	193
- knooppunten van de vierde orde	195
- knooppunten van de vijfde orde	195
c. Onregelmatige veelvlakken	196
- antiprisma	196
- rombische triacontaëder	196
- Catalan lichamen	196
IX. VECTORALGEBRA	197- 224
1. Het begrip vector	197
2. Basisbewerkingen van vectoren	198
a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren	198

IX

b. Meetkundig scalair product	198
3. Vectorcoördinaten en kentallen	199
4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren	200
a. De lengte van een vector	201
b. Algebraïsche som van twee vectoren	201
c. Algebraïsch scalair product	202
5. Inwendig product van twee vectoren	203
6. Toepassingen op driehoek, viervlak en lijnstukken	205
7. Vectorvoorstellingen en vergelijkingen	207
a. Vectorvoorstelling van een punt	207
b. Vectorvergelijking van een lijn	207
c. Normaalvergelijking van een lijn	208
d. Vectorvergelijking van een vlak	210
e. Normaalvergelijkingen van een vlak	210
8. Vectorproducten	212
a. Uitwendig product van twee vectoren	212
- eigenschappen van het uitproduct	213
- kentallen van het uitproduct	215
b. Determinanten	216
- Regel van Sarrus	218
- eigenwaarden en eigenvectoren	220
c. Uitproduct en blokproduct als determinanten	222
- het uitproduct	222
- het blokproduct	222
X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN	225- 234
1. Afstanden in vectorruimten	225
a. Afstand van een punt tot een lijn	225
b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen	226
c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen	226
d. Afstand van een punt tot een vlak	227
2. Hoeken tussen lijnen en vlakken	228
a. Hoek tussen twee lijnen	228
b. Hoek tussen een lijn en een vlak	229
c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken	229
- snijlijn van twee vlakken	231
3. Vraagstukken	232
XI. GRAFEN EN MATRICES	235- 256
1. Werken met grafen en matrices	235
a. Voorstellingen van een graaf	235
b. Gelijkwaardige grafen	235
c. Graaf en matrix	236

d. Het 'Handelsreizigersprobleem'	237
2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf	238
3. Bewerkingen met matrices	239
a. Som en verschil van twee matrices	239
b. Scalair product van een matrix en een reëel getal	240
c. Product van twee matrices	240
4. Overgangsmatrices	244
a. Toepassingen op diverse deelgebieden	244
b. Groei van populaties	246
c. Markowketens	247
d. Stabilisatie	248
5. Populatievoorspellingen volgens Leslie	250
a. Voorbeelden van de betekenis	250
- leeftijdsopbouw en totale populatie	251
b. Exponentiële groei	252
c. Bijzondere populatiegroei	252
d. Bevolkingsgroei in China	253
XII. RIJEN EN REEKSEN	257- 282
1. Getallenrijen	257
2. Bijzondere rijen	258
a. Rekenkundige rij	258
b. Meetkundige rij	259
c. Rij van Fibonacci	261
3. Convergentie en divergentie van rijen	262
4. Reeksen	263
a. Voorbeelden van reeksen	263
b. Convergentie en divergentie van reeksen	264
- Quotiëntencriterium van d' Alembert	264
- Regel van Leibniz	265
5. Convergentie van standaardreeksen	266
a. Rekenkundige reeks	266
b. Meetkundige reeks	266
c. Harmonische reeks	267
d. Alternerende reeksen	267
6. Machtreeksen	268
a. Eigenschappen van machtreeksen	269
b. Convergentie van machtreeksen	270
- meetkundige reeks	271
- alternerende machtreeks	271

XI

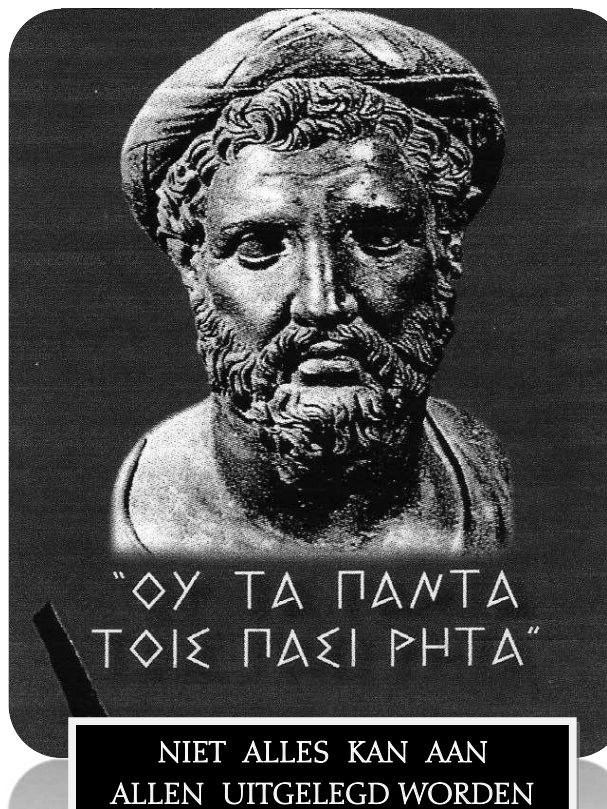
7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin	273
a. de functie $f(x) = e^x$	274
b. $f(x) = \sin x$	275
c. $f(x) = \cos x$	275
d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$	276
e. $f(x) = \ln x$	277
8. Resttermen	279
- Formule van Lagrange	279
9. Benadering van het getal e van Euler en het getal π	280
a. Het getal e van Euler	280
- definitieformule van e	280
b. Het getal π	281
XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	283- 297
1. Differentiaalvergelijkingen	283
a. Voorbeelden	283
b. Lijnelementenvelden	285
c. Methode van Euler	288
d. Voorbeelden van continu dynamische modellen	289
XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL	298- 371
A. Perspectief	298
1. Beelden via een glasplaat	298
2. Perspectiefbeelden van objecten	299
a. Perspectiefbeeld van een lijn	299
b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak	300
c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel	301
d. Beeld van een punt in het grondvlak	301
e. Beeld van een tegelpatroon	302
3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld	302
- ware beeld van tegelvloeren	304
4. Eenpuntperspectief	304
a. Kubus en vierkante balk	305
b. Tegelpaden van vierkante tegels	309
5. Tweepuntperspectief	310
B. Exacte logica	316
1. Conjuncties, disjuncties, implicaties	316
2. Waarheidstabellen	317
a. Waarheidstabellen van $p \wedge q$, $p \vee q$ en $p \Rightarrow q$	317
b. De ontkenning niet A ($\neg A$)	318

XII

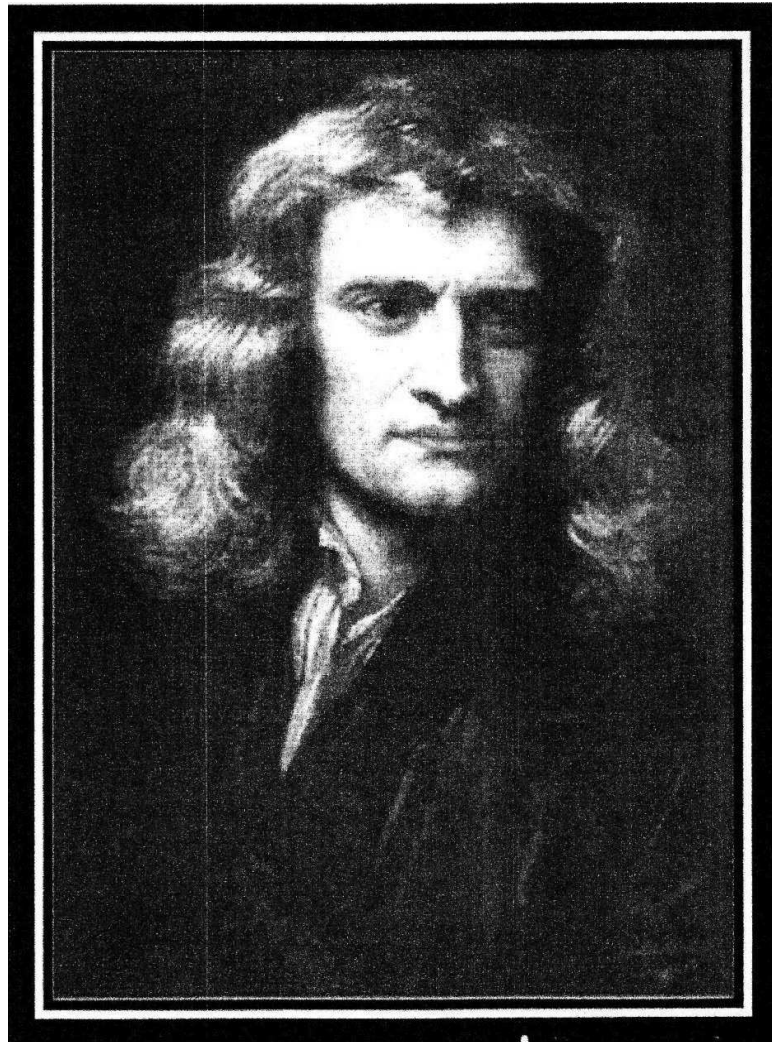
c. Equivalenties	319
- De Prinses en de tijger	321
3. Bijzondere proposities	323
a. Bewerkingsvolgorden	323
b. Modus ponens, modus tollens, ('modus nonsens')	323
c. Tautologieën, contradicties en paradoxen	325
4. Logische puzzels	326
a. De vier tegels	326
b. Het inslikken van olifanten	327
c. De vijf slavinnen van de kalief	328
d. De zeven bordjes	329
5. Algebra van Boole	330
a. Eigenschappen van de logische operatoren	330
- commutatieve eigenschap	330
- associatieve eigenschap	331
- distributieve eigenschap	331
b. Speciale eigenschappen	332
C. Projectieve meetkunde	333
1. Kegelsneden in projectie	333
a. De ellips	334
- ware gedaante van de doorsnede	335
b. De parabool	336
- ware gedaante van de doorsnede	337
c. De hyperbool	337
- gelijkzijdige en ongelijkzijdige hyperbool	337, 338
2.. Doorsnede van een kegel en een cilinder	340
D. De Lorentz-factor	341
E. Beslissingen na steekproeven	343
a. Normale toetsen	343
- onderzoek naar de werking van een vulmachine	343
- toetsing van beweringen	347
b. Binomiale toetsen	348
c. Tekentoetsen	350
F. Poisson-verdeling	353
G. Complexe getallen	357
a. Rekenen met complexe getallen	357
- Som, product en quotiënt	357
- Het complexe vlak	358
- Absolute waarde van een complex getal	358
- Complexe getallen in poolcoördinaten	358
- Complexe getallen als vectoren	359
b. Meetkunde in de complexe vectorruimte	359
- De cirkel en de eenheidscirkel	359, 361

XIII

- Formules van Euler	361
- de polaire of (r, φ) - notatie	362
c. Complexe functies e^z , cosinus z en sinus z	366
- de complexe functie e^z	366
- de complexe functies cosinus z en sinus z	366
d. Wortels en polynomen	367
- n^{de} machtswortel van een complex getal	367
- n^{de} machtswortels en n^{de} graadspolynomen	368
e. Hoofdstelling van de Algebra	368
f, Reële polynomen	370
 Gebruikte symbolen en uitdrukkingen	 372- 373
 Trefwoordenregister	 374- 377



Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').



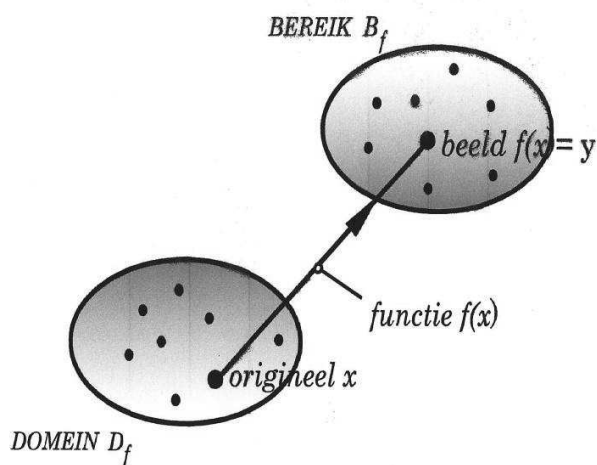
Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde van de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in $2\frac{1}{2}$ uur dus 10 km. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie f gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldigd met drie’ dan is $f(3) = 9$,

$f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.

De functie zelf wordt dan geschreven als:

$f(x) = 3 \cdot x$ of korter $y = 3x$

De getallen 3, -7 en a in dit voorbeeld heten **originelen** van de functie $f(x) = 3x$, de getallen 9, -21 en $3a$ zijn dan de bijbehorende **beelden** van die functie.

De verzameling *originelen* van f heet het **domein** D_f van de functie, de verzameling *beelden* heet het **bereik** B_f .

Als geen speciaal domein of bereik is aangegeven, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* (uit het domein) en *alle beelden* (uit het bereik) elementen zijn van de verzameling reële getallen \mathbb{R} .

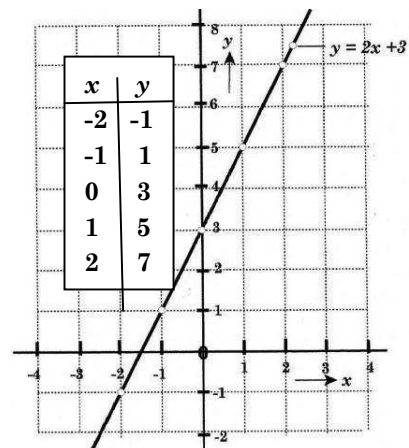
Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f , (g, h, i, ...) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f , precies één element $f(x) = y$ uit het bereik B_f bepaalt

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel:

Het *origineel* x op de x -as, het beeld $y = f(x)$ op de y -as.

In bijgaande figuur is vanuit de x - y -tabel de grafiek getekend van de functie: $f(x) = y = 2x + 3$.

In het algemeen kunnen we met ‘de functie $f(x)$ ’ zowel de **grafiek van $f(x)$** als de **functie $f(x)$ zelf** bedoelen.



2. Lineaire functies

Voor elk tweetal punten P en Q van een lineaire functie geldt dat de verhouding tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de bijbehorende toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een **vaste waarde** heeft.

De betekenis hiervan is als volgt:

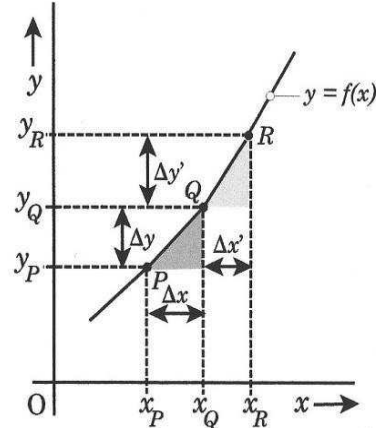
Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij

$$P = (x_P, y_P) \text{ en } Q = (x_Q, y_Q).$$

De verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de hoek die het lijnstukje PQ maakt met de *positieve* x -as, dus bepaalt de *richting* van PQ .

Stel $R(x_R, y_R)$ is een ander naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt

de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$



Omdat *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt

dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes *gelijk* ofwel:

PQ en QR liggen in elkaars verlengde dus ook: **P, Q en R liggen op een rechte lijn.**

Daar P, Q en R willekeurig gekozen naburig punten zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een **lineaire** functie is dus een **rechte lijn**. (dit verklaart de naam *lineaire functie*). De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($\Delta x \neq 0$) bepaalt de *richting* van lijn l en noemt men daarom de **richtingscoëfficiënt a** van l .

De *vergelijking* van lijn l , dus de betrekking tussen de waarden x en y waaraan *alle punten* (x, y) van lijn l voldoen vind je nu als volgt:

Voor de lijn l tussen twee willekeurige punten $P(x_P, y_P)$ en $Q(x_Q, y_Q)$ geldt volgens voorgaande dat de *richtingscoëfficiënt* $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$... (1)

Ga ervan uit dat l *niet evenwijdig* is met de y -as, dus $x_Q - x_P \neq 0$ en dat $P(x_P, y_P) = (0, b)$ het snijpunt is van l met de y -as, dus $x_P = 0$ en $y_P = b$... (2)

Voor $Q(x_Q, y_Q)$ kiezen we een willekeurig punt $Q(x, y)$, dus $x_Q = x$ en $y_Q = y$... (3)

(2) en (3) in (1) ingevuld geeft: $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x}$, dus $ax = y - b$ ofwel $y = ax + b$

De betrekking $y = ax + b$ heet nu *de vergelijking* van l .

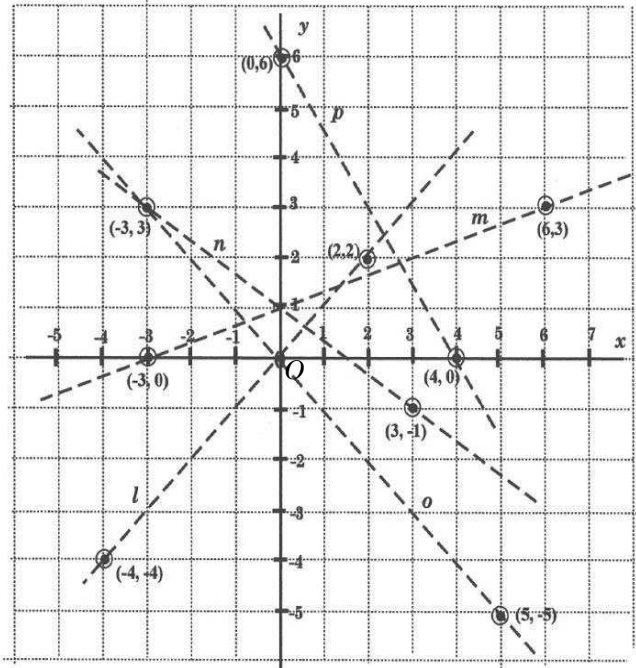
(Als $l \parallel y$ -as dan is bij elke y : $x_P = x_Q$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ bestaat dan niet omdat $x_Q - x_P = 0$)

Bij elke y is dan $x = x_P = x_Q$ dus is $x = x_P (= x_Q)$ de vergelijking van l als $l \parallel y$ -as)

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking $y = ax + b$ waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y -coördinaat is van het snijpunt van l met de y -as.

Toepassingen:

1. In deze figuur zijn de lijnen l , m , n , o en p getekend door twee gegeven punten in een *orthonormaal coördinatenstelsel* xOy . (Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaten-assen: de X -as = 'abscis' en de Y -as = 'ordinaat', met oorsprong O als hun snijpunt. De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1 .



- a. Bepaal van elke lijn de vergelijking
- b. Bepaal ook de vergelijking van de X -as en de Y -as.
- c. Hoe lopen de lijnen q : $x = 3$ en r : $y = -5$?

a. De grafiek van een lineaire functie is een lijn l met vergelijking $l: y = ax + b$, waarin a de *richtingscoëfficiënt* is van l en b de y -coördinaat van het snijpunt van l met de y -as. Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten op het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is dan van lijn l : $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{3 - (-4)} = 1$ en $b = 0$,

dus de vergelijking is $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$.

- Voor m geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$ en $b = 1$

dus wordt de vergelijking : $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

- Voor n geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ en $b = 1$

dus is de vergelijking is $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

- Voor o geldt: $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-8}{8} = -1$ en $b = 0$

dus de vergelijking is: $o: y = -x$

- Voor p geldt $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$ en $b = 6$

dus de vergelijking is: $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$, dus onafhankelijk van de waarde van x .

De vergelijking van de x -as is dan: $y = 0$ of vollediger: $x \in \mathbb{R}$ en $y = 0$

Zo geldt voor alle punten van de y -as $x = 0$ ofwel: $x = 0$ en $y \in \mathbb{R}$

- c - Alle punten (x, y) van de lijn q met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm $(3, y)$.

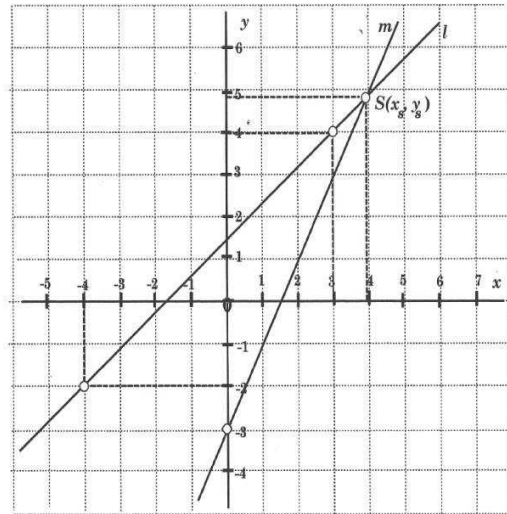
Het is dan de (verticale) **lijn, evenwijdig met de y -as door het punt $(3, 0)$**

Zo is de lijn $r: y = -5$ de (horizontale) **lijn evenwijdig met de x -as door het punt $(0, -5)$**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten $(3, 4)$ en $(-4, -2)$
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn $m : y = 2x - 3$

a. In $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt van l uit: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: $l: y = \frac{6}{7}x + b$.
 Hierin de coördinaten van $A = (3, 4)$ (of $B = (-4, -2)$) ingevuld geeft $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$
 zodat de vergelijking is $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$ *)



b. Het snijpunt $S(x_s, y_s)$ van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan de vergelijking:

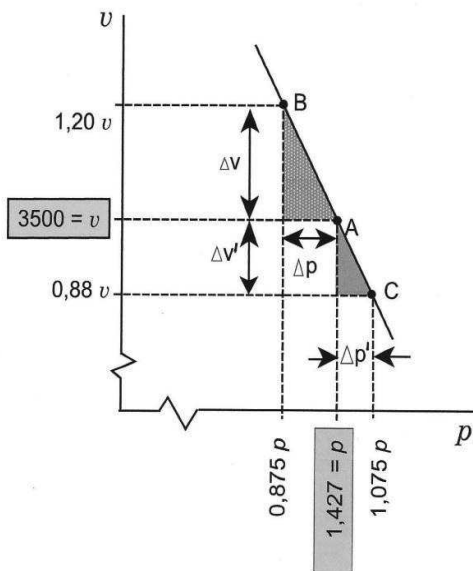
$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$ en aan $m: y = 2x - 3$, zodat

$$\text{dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Het snijpunt van l en m is dus het punt $S\left(\frac{31}{8}, \frac{19}{4}\right) \approx (3,9; 4,8)$

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
 Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
 Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%. (punt C).



- a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
 b. Wat is de betekenis van de uitkomst van a voor de prijs/verkoop-verhouding bij stijgende en bij dalende prijs?

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20v}{p - 0,875p} = \frac{-0,20v}{0,125p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88v - v}{1,075p - p}$

$$= \frac{-0,12v}{0,075p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

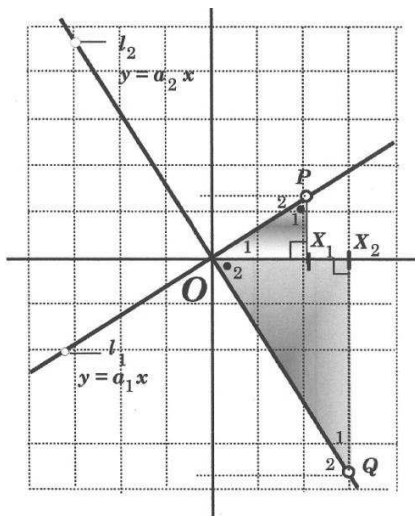
De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk \Rightarrow
 A, B en C liggen op een rechte lijn.

*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in {3, -4} [STO] L1 en {4, -2} [STO] L2. Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg ($ax + b$) [ENTER]
 De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg $y = ax + b: a \approx .85714... = \frac{6}{7}; b \approx 1.42857... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject BC de verhouding *prijsstijging* : *verkoopdaling* $(-1,6)$ gelijk is aan de verhouding *prijzdaling* : *verkoopstijging* $(-1,6)$. Men zegt in zo'n geval dat de verkoopdaling (bij toenemende prijs) **evenredig** is met de verkoopstijging (bij dalende prijs), want een *evenredigheid* is een gelijkheid van twee verhoudingen.

Eigenschap:

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 gelijk aan -1 , dus $a_1 \cdot a_2 = -1$



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x -as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x -as.

De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de ΔOPX_1 en OQX_2 is $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$ (gegeven).

Ook is in ΔOPX_1 : $\angle P_1 + \angle O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

dus is $\angle P_1 = \angle O_2$. (met zwarte stip) $\dots(2)$

De ΔOPX_1 en OQX_2 zijn dan gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en $\angle P_1 = \angle O_2$ volgens (2) met gevolg:.

$$PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2 \text{ ofwel: } \frac{PX_1}{OX_1} = \frac{OX_2}{QX_2} \quad (\text{blz.141})$$

$$\frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = 1 \Rightarrow \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{-QX_2}{OX_2} = -1 \quad \dots(3)$$

(1) in (3) gesubstitueerd geeft tenslotte: $a_1 \cdot a_2 = -1$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $a_1 \cdot a_2 = -1$ dan staan l_1 en l_2 loodrecht op elkaar. (Lees voor het bewijs hiervan bovenstaand bewijs van achteren naar voren.)

3. Kwadratische functies

Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie $f(x)$ van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads- functies, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van **kwadraatplitsing**:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + a(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}) \\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \text{ ofwel:} \\ f(x) &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} \text{ met } D = b^2 - 4ac \quad \dots(a) \end{aligned}$$

Uit de onderbouw:

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b) \times (c+d) \\ &= a \cdot d + a \cdot c + b \cdot d + b \cdot c \\ (a+b)(a+b) &= (a+b) \times (a+b) \\ &= a \cdot b + a \cdot a + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + 2 a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

Kies nu $x = -\frac{b}{2a}$ in: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan ontstaat:

$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a \cdot (0) - \frac{D}{4a} \Rightarrow f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{D}{4a}$$

Dit betekent dat $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een punt is van elke kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem dit punt T , dan is $T(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$... (b)

1^o. We bewijzen nu dat het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ de uiterste waarde is ('maximum' of 'minimum') van de kwadratische functie $f(x)$.

In (a) werd bewezen dat voor elk willekeurig punt (x, y) van $f(x)$ geldt: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$.

In (b) bleek dat voor het punt T geldt dat $y_T = -\frac{D}{4a}$, dus volgt de waarde van $y - y_T$ uit:

$$y - y_T = \{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}\} - \frac{-D}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$$
 ... (c)

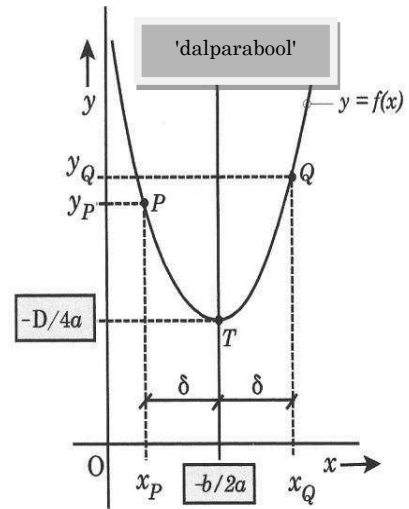
Als hierin $a > 0$ dan is $a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, want $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$

Dit betekent als $a > 0$, dat elke reële waarde van y in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan y_T , dus is het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een **minimum** van de functie $f(x)$.

Op dezelfde manier blijkt dat als $a < 0$ steeds geldt

$y - y_T \leq 0$ ofwel: $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een **maximum** van $y = ax^2 + bx + c$ als $a < 0$... (d)

Het punt $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, *minimum of maximum*, heet de **top** van de kwadratische functie.



2^o De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een **symmetrieas** van $f(x)$.

Bewijs: Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ links van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt

$x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$ en voor een punt Q van $f(x)$ op eenzelfde afstand rechts van deze lijn is

$$x_q = -\frac{b}{2a} + \delta.$$

In de vorm van de kwadraatafsplitsing is: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dus als $x = x_p = -\frac{b}{2a} - \delta$

dan is $y_p = a(-\frac{b}{2a} - \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a}$... (a)

Als $x = x_q = -\frac{b}{2a} + \delta$ dan is $y_q = a(-\frac{b}{2a} + \delta + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a\delta^2 - \frac{D}{4a}$... (b)

Uit (a) en (b) volgt: $y_p = y_q$ dus P en Q liggen **symmetrisch t.o.v. de lijn $x = -\frac{b}{2a}$**

De vorm van de kwadratische functie heet **parabool**, de symmetrieas heet de **as**, het maximum of minimum T heet de **top** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een **minimum** ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is top T een **maximum** ('bergparabool').

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een parabool met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ en een punt $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ als top, waarin $D = b^2 - 4ac$. Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool')

a. Vierkantsvergelijking

Eventuele snijpunten van de x -as (met vergelijking $y = 0$) en de parabool $y = ax^2 + bx + c$ moeten voldoen aan $y = ax^2 + bx + c$ en aan $y = 0$ dus zijn de oplossingen (wortels) van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Ze heten ook de **nulpunten** van $f(x)$.

Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de '**abc-formule**' gebruikt:

Gebruik de kwadraatplitsing: $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dan geldt voor de nulpunten $y = 0$,

dus $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$, ofwel: $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$ waaruit dan volgt:

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ kortweg: } x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Nulpunten ('wortels') van $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn oplossingen x_1, x_2 van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c = 0$ met $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ waarin $D = b^2 - 4ac$

De waarde van D hierin bepaalt het aantal oplossingen, dus het aantal wortels van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de **discriminant** van deze vergelijking:

1^o. Als $D = b^2 - 4ac > 0$ dan bestaat \sqrt{D} heeft de vergelijking twee wortels:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \text{ De parabool snijdt de } x\text{-as in twee verschillende punten.}$$

2^o. Als $D = 0$ dan is $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één

(tweevoudige, is 'dubbel tellende') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.

Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een **raakpunt** aan de x -as.

3^o. Als $D < 0$ dan bestaat \sqrt{D} niet in \mathbb{R} dus zijn er geen reële oplossingen.

De parabool snijdt de x -as niet. Er zijn geen reële nulpunten. *)

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ met nulpunten $x = x_1$ en $x = x_2$ is te schrijven als $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

*) Op blz.51-52 worden imaginaire oplossingen (complexe getallen) behandeld in geval $D < 0$

De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = a x^2 + b x + c$ met $a = 1$ zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ en $a = 1$ dus volgt het

product $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ uit:

$$\begin{aligned} (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= \left\{ x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2} \right) \right\} \cdot \left\{ x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2} \right) \right\} \\ &= \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2} \right) \cdot \left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} \\ &= \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \quad (\text{want } b^2 - D = 4c \text{ omdat } D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1) \text{ dus:} \\ (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= x^2 + bx + c \end{aligned} \quad \dots(1)$$

Hiermee is de term $x^2 + bx + c$ **ontbonden in twee factoren** $x - x_1$ en $x - x_2$ waarin x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn. Met deze eigenschap kan je de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$ vaak snel te vinden, omdat $x_1 + x_2 = -b$ en $x_1 \cdot x_2 = c$.

Bewijs: Volgens (1) is $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c$, dus
 $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 + b \cdot x + c$ waaruit dan direct volgt:
 $(x_1 + x_2) = -b$ en $x_1 \cdot x_2 = c$... (2)

Voorbeeld: In de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$, is $b = -11$ en $c = 28$ dus volgens (2) is dan $(x_1 + x_2) = -b = 11$ en $x_1 \cdot x_2 = c = 28 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11, x_1 \cdot x_2 = 28$ dus $x_1 = 4, x_2 = 7$.
De wortels van $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn dus $x_1 = 4$ en $x_2 = 7$.

Opgaven:

1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

Stel $x^2 - x - 12 = (x + p) \cdot (x + q) = 0$ dan zijn p en q de nulpunten, waarvoor geldt:
 $p + q = -1$ en $p \cdot q = -12$.

Hieraan voldoen $p = -4$ en $q = 3$ dus $x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$ zodat
 $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -3$ *)

De nulpunten zijn $x_1 = 4$ en $x_2 = -3$

2. Los op $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel $x^2 + 2x - 143 = (x + p) \cdot (x + q)$ dan is $p + q = 2$ en $p \cdot q = -143$, dus
 $p = -11$ en $q = 13$. Gevolg: $x^2 + 2x - 143 = (x - 11)(x + 13) = 0 \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = -13$

3. Van (de grafiek van) een parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$ is de top $T = (2, -3)$

De lijn l met vergelijking $y = -4x + 1$ is een raaklijn aan de parabool.

Bepaal de vergelijking van $f(x)$.

De coördinaten van top T van de parabool volgen uit: $x_T = \frac{-b}{2a}$ en $y_T = \frac{-D}{4a}$ (blz.6).

*) Volgens de "Wet van het nulelement" geldt algemeen: Als $a \times b = 0$ dan $a = 0 \vee b = 0$ en omgekeerd.

In deze opgave geldt dan $x_T = \frac{-b}{2a} = 2$ zodat $b = -4a$... (1)

$y_T = \frac{-D}{4a} = -3$ dus $\frac{-(b^2-4ac)}{4a} = -3 \Rightarrow b^2 - 4ac = 12a$... (2)

De snijpunten van f en de lijn $l: y = -4x + 1$ volgen uit $ax^2 + bx + c = -4x + 1$ ofwel uit $ax^2 + (b + 4)x + (c - 1) = 0$.

Omdat $l: y = -4x + 1$ raaklijn is aan de parabool is er slechts één snijpunt van de parabool met l dus moet de discriminant van $ax^2 + (b + 4)x + (c - 1) = 0$ zijn. (blz.7)

Gevolg: $D = (b + 4)^2 - 4a(c - 1) = 0$ ofwel $b^2 + 8b + 16 - 4ac + 4a = 0$... (3)

Substitueer $b^2 - 4ac = 12a$ uit (2) in (3) dan vind je $12a + 8b + 16 + 4a = 0$

Met $b = -4a$ volgens (1) is dan: $12a + -32a + 16 + 4a = 0 \Rightarrow -16a = -16$ zodat

$a = 1$ en $b = -4$. Deze waarden in (2) ingevuld geven: $b^2 - 4ac = 12a \Rightarrow 16 - 4c = 12 \Rightarrow c = 1$ dus $f(x) = y = ax^2 + b x + c = x^2 - 4x + 1$ is de gevraagde parabool .

4. Machtsfuncties

De functie $y = f(x) = x^a$ is een machtsfunctie van x , waarin de exponent a een constante is en het grondtal x de variabele

Bij *samengestelde machtsfuncties* (bijvoorbeeld in *polynomen* als $f(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$) spelen de **machtregels** een grote rol. Uitgaand van de *definitieformule van een positieve gehele macht* van a :

$a^1 = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a, a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ dus algemeen: $a^p = \overbrace{a \cdot a \dots a}^{p \text{ keer}}$

volgen direct de *regels*: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ en $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Voor *elke* $a \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{a^p}{a^p} = 1$ en ook $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$ dus $a^0 = 1$

Zo ook: $\frac{1}{a^p} = \frac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = a^{-p}$ en $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$ omdat $(a^{\frac{1}{p}})^p = a^{\frac{1}{p} \cdot p} = a^1 = a$

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^0 = 1$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

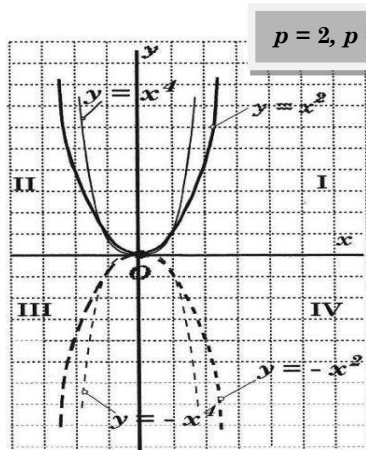
Per definitie gelden deze rekenregels voor *alle machten met reële exponenten*:

Zo is bijvoorbeeld: $3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, 5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}, 7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten n^{de} *graads machtsfuncties* . Zo is $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad*, machtsfuncties als $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad*, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad* et cetera. (De besproken 'lineaire functie' $f(x) = ax + b$ is dus een *eerstegraads machtsfunctie*, de 'kwadratische functie' $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een *tweedegraads machtsfunctie*).

a. Grafieken

Aan de *exponent van een machtsfunctie* kun je de 'grondvorm' van hun grafieken herkennen. We onderzoeken hier de grafieken in de vier kwadranten I, II, III en IV van *machtsfuncties* $f(x) = y = x^p$ bij verschillende waarden van p .



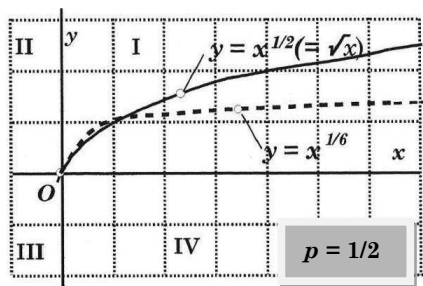
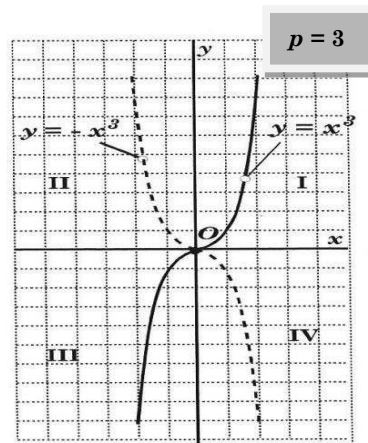
1. Als p in $y = x^p$ een **positief, even getal** is, dus $p = 2, 4, 6, \dots$ dan zijn alle y -waarden van $y = x^p$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II.

In de grondvorm herken je de **dalparabool**.

Bij eenzelfde waarde van p is $y = -x^p$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm de **bergparabool**.

2. Is p in $y = x^p$ een **positief, oneven, geheel getal $\neq 1$** , dus $p = 3, 5, 7, \dots$ dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x (x^2, x^4, x^6, \dots die steeds ≥ 0 zijn), ook *negatieve* y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$. Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven* p dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant*.

Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $y = -(x^p)$ een *spiegeling in de oorsprong* van $y = x^p$.



3. Als p in $y = x^p$ een **positieve breuk** is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in

$y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan er *geen reële* y waarden bij *negatieve* x .

Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ en is

$y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ dus bestaan beide niet in \mathbb{R} .

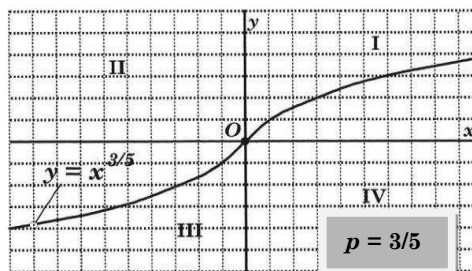
Alle waarden van $y = x^p$ liggen dan *in I*.

4. Als p in $y = x^p$ een **positieve breuk** is met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve* x , die dan ook zelf *negatief* zijn, en dus in III liggen.

Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$:

$$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297.$$

De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)



*) Met de GR TI-83 zijn alle grafieken direct te plotten. VB: Druk op Y1= en voer in $X^{(3\div 5)}$ ENTER.

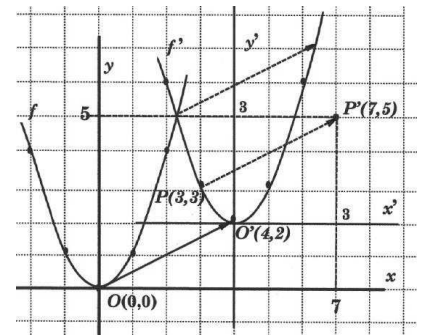
Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5. Kies Xscl = 1 en Yscl = 1 (Xres=1) ENTER. Druk op Graph en de grafiek uit 4 verschijnt op het display.

b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, kunnen via *transformaties* vaak direct formules worden afgeleid van meer gecompliceerde functies. Bij **congruentietransformaties** als: *translatie* ('evenwijdige verschuiving' van $y = f(x)$), *rotatie* (draaiing om de oorsprong O) en *spiegeling* (vermenigvuldiging t.o.v. een lijn met de factor -1) ontstaat van $f(x)$ een beeld $f'(x)$ dat congruent is met $f(x)$.

- Transformaties door translatie

Hiernaast is in een xOy stelsel de grafiek getekend van de 'standaardparabool' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong O . Via een **translatie** $T(4,2) = (4, 2)$ verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (positieve x -richting) en +2 eenheden omhoog (positieve y -richting). De functie $f: y = x^2$ wordt daarbij 'afgebeeld' op de met f congruente grafiek f' .



Het punt $O(0,0)$ wordt door de translatie $T(4,2)$ afgebeeld op $O'(4,2)$; $P(3,3)$ wordt afgebeeld op $P'(x',y') = (7,5) = (3+4, 3+2)$,

Omdat de *translatie* wordt toegepast op alle punten van het xOy stelsel, ontstaat ook een translatiebeeld $x'O'y'$ van het assenstelsel xOy , waaruit blijkt dat voor de coördinaten (x, y) van een punt $P(x, y)$ bij de translatie $T(4,2)$ **$T(a,b)$ in het verschoven assenstelsel $x'O'y'$** geldt dat $x' = x - 4$ en $y' = y - 2$... (1)

Vergelijk je de vorm en ligging van f in het originele xOy stelsel met die van het beeld f' in het 'verschoven' $x'O'y'$ stelsel, dan zie je dat ten opzichte van de verschoven coördinaatassen de vergelijking van de nieuwe functie f' zal zijn: want de top T van f' ligt in de nieuwe oorsprong O' dus geldt de topvergelijking ten opzichte van het stelsel $x'O'y'$ (2)

(1) in (2) gesubstitueerd geeft dan als vergelijking van het translatiebeeld van $y = x^2$ bij $T(4,2)$: $y' = (x')^2 \Rightarrow y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2 = x^2 - 8x + 18$

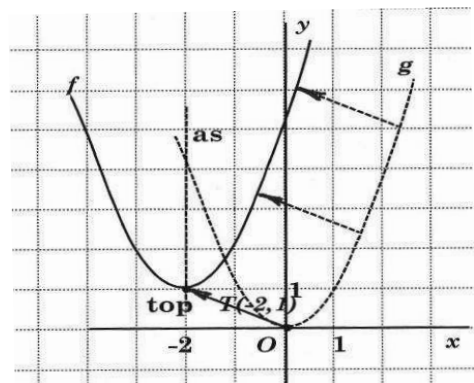
Uit dit voorbeeld blijkt dat algemeen het beeld van een translatie $T(a,b)$ van een functie $y = f(x)$ volgt uit de betrekkingen $x' = x - a$ en $y' = y - b$, dus::

Bij een translatie $T(a,b)$ geldt voor de coördinaten van het beeldpunt $P'(x', y')$ van een punt $P(x, y)$ in het verschoven assenstelsel $x'O'y'$: $x' = x - a$ en $y' = y - b$
Voor het beeld $f'(x)$ van de functie $y = f(x)$ geldt dan $y = f(x - a) + b$

Toepassingen:

- 1. Schets de grafiek van de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$

Volgens de *translatietransformatie-regel* gaat bij een translatie $T(a, b)$ de grafiek g van $y = x^2$ over in $f: y = (x - a)^2 + b$. In $f: y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie $f: y = (x + 2)^2 + 1$ uit een **translatie** van de standaardfunctie $g: y = x^2$ over $T(-2, 1)$. In de figuur is de grafiek van f getekend. De **top** is het punt $(-2, 1)$, de **as** is de lijn $x = -2$.

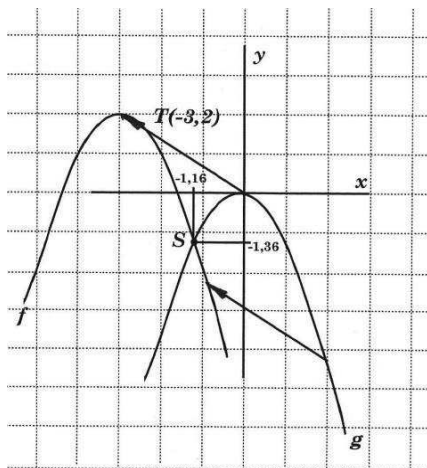


2. Schets de grafiek van de functie $f: y = -x^2 - 6x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool $g: y = -x^2$

Door kwadraatplitsing herleid je de gegeven functie

$$f: y = -x^2 - 6x - 7 \text{ tot: } f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x + 3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat door de **translatie** $T(-3, 2)$ uit de standaardfunctie $g: y = -x^2$



De **top** van (bergparabool) f is dan het punt $(-3, 2)$
de **as** is de lijn met $x = -3$.

Het **snijpunt** $S(x, y)$ van de grafieken f en g volgt uit:
 $y = -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2$ dus uit $-6x - 7 = 0$ zodat
 $x = -\frac{7}{6} \approx -1,16$ en $y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1,36$.

Het gevraagde snijpunt is dan $S(-1,16; -1,36)$.

3 Schets de grafiek van de functie $f: y = (x + 3)^5 - 50$ en bepaal de waarden van de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn $l: y = 25x$.

De grafiek van de functie $f: y = (x + 3)^5 - 50$
ontstaat uit $f: y = x^5$ door de **translatie** $T(3, -50)$.

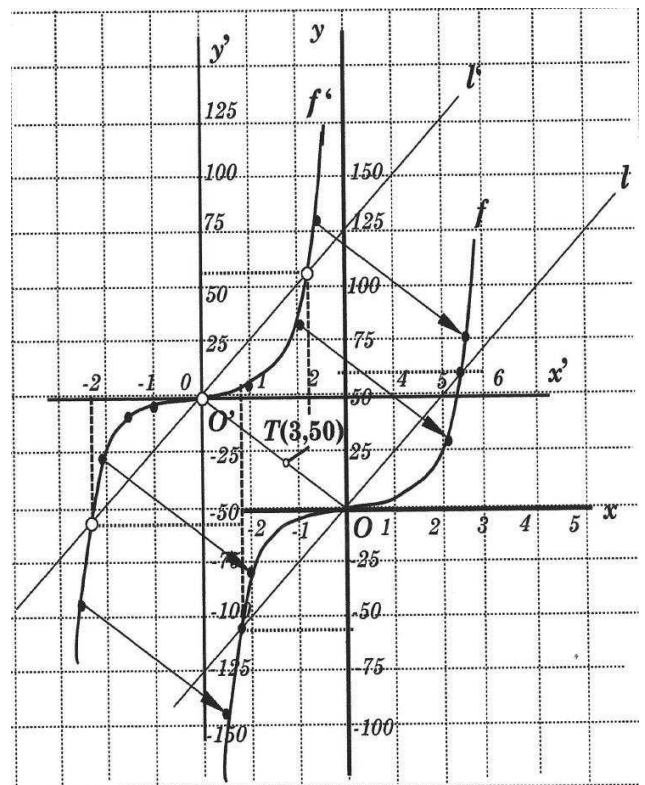
De snijpunten van de lijn $l: y = 25x$ met parabool f
bereken je eenvoudig in het $x'O'y'$ -stelsel omdat
daarin geldt $f': y' = (x')^5$ en $l': y' = 25x'$ (omdat
 $l' \parallel l$ door O' gaat).

Voor de snijpunten van l' en f' geldt dan
 $(x')^5 = 25x'$ dus $x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25}$
Verder is $y' = 25x'$ dus $y' = 0 \vee y' = \pm 25 \sqrt[4]{25}$

De snijpunten zijn dan: (witte stippen)

$$(0,0) - (\sqrt[4]{25}, 25 \sqrt[4]{25}) \text{ en } (-\sqrt[4]{25}, -25 \sqrt[4]{25}) \approx$$

$$(0,0) - (2,24; 55,90) \text{ en } (-2,24; -55,90).$$

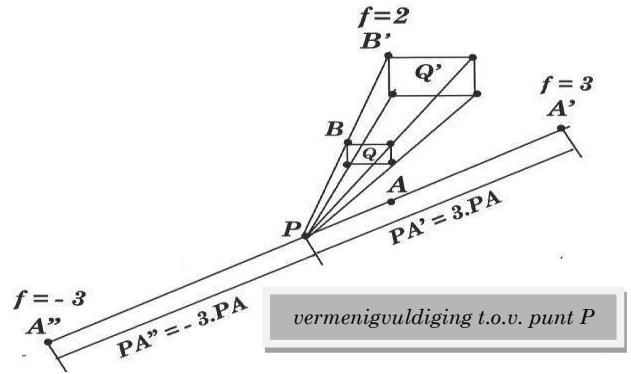


Transformaties door vermenigvuldiging

Ook kennen we transformaties van functies door vermenigvuldiging.

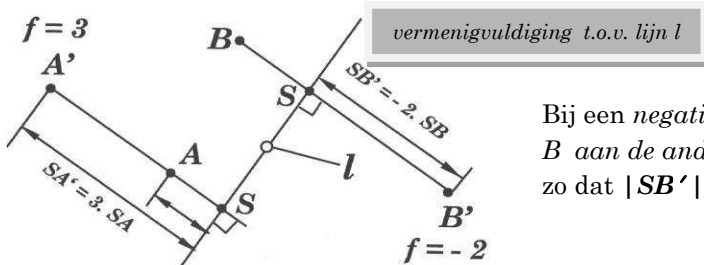
Men onderscheidt daarbij

- a - vermenigvuldiging *ten opzichte van een punt*
- b - vermenigvuldiging *ten opzichte van een lijn*.



a. Per definitie is het **product** van een punt **A ten opzichte van een punt P** (het 'centrum') bij een **positieve factor f**, het punt **A'** op de lijn **PA**, waarvoor geldt dat $|PA'| = f \times |PA|$. Zo is de rechthoek **Q'** het beeld van **Q** bij vermenigvuldiging met de factor $f = +2$. Bij een **negatieve factor f** ligt het beeldpunt **A''** van punt **A** aan de andere kant van **P** als **A** op de lijn **AP** en wel zo dat $|PA''| = -f \times |PA|$.

b. Bij vermenigvuldiging met een **positieve factor f** van een punt **A ten opzichte van een lijn l** ontstaat het beeldpunt **A'** door vanuit **A** een **loodlijn op l** neer te laten en vanuit het **voetpunt S** van die loodlijn een afstand **SA'** zo af te passen, dat $SA' = f \times SA$.

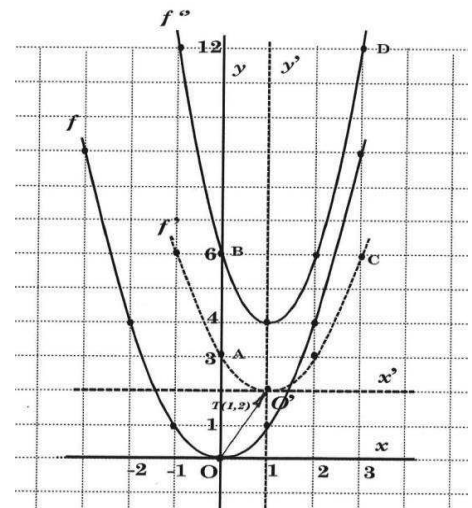


Bij een **negatieve factor f** ligt het beeldpunt **B'** van punt **B** aan de andere kant van **P** als **B**, op de lijn **BS** en wel zo dat $|SB'| = -f \times |SB|$.

Grafieken van functies als $f: y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 1$ hebben niet de **standaardvorm** van $y = x^2$ zoals alle grafieken van de functies $y = 1x^2 + ax + b$.

Wil je de grafiek van bijvoorbeeld $f: y = 2x^2 - 4x + 6$ uit de standaardvorm van $y = x^2$ afleiden, dan gaat dit als volgt:

- 1^o Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf: $f: y = 2x^2 - 4x + 6$
 $\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2\{(x - 1)^2 + 2\}$
- 2^o Pas de **translatie T(1,2)** toe op de punten van de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x - 1)^2 + 2$ (**translatietransformatieregel**)
- 3^o **Vermenigvuldig** dit beeld f' **ten opzichte van de x-as met +2** (notatie $P(x - as, 2)$). Dit geeft:
 $f'': y = 2 \cdot \{(x - 1)^2 + 2\} = 2x^2 - 4x + 6$ dus is f'' de grafiek van de functie $f: y = 2x^2 - 4x + 6$.



Algemeen geldt **voor elke functie y = f(x)**: *)

Bij de vermenigvuldiging $P(x - as, a)$ gaat een functie $y = f(x)$ over in $y = a \cdot f(x)$

*) Omdat ook vermenigvuldigingsbeelden van een functie de **beeldpunten** zijn van de **functie f(x)**, is deze **vermenigvuldigingregel P(x - as, a)** **geldig voor elke reële functie f(x)**.

- Transformaties van wortelvormen

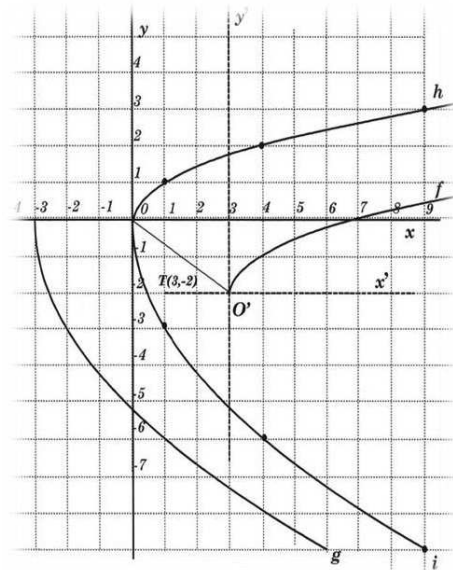
Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as, afgeleid worden van hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = x^{0,5}$

Voorbeelden:

- a. Schets de grafieken van de functies $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ en $g: y = -3\sqrt{x+3}$
- b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.
- c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

- a. Teken de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$.
Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),...
- Pas nu op h de translatie $T(3, -2)$ toe dan ontstaat volgens de transformatieregel de gevraagde grafiek $f: y = \sqrt{x-3} - 2$

- Uitgaande van de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$ vermenigvuldig je deze t.o.v. de *x*-as met de factor -3 , waaruit de grafiek $i: y = -3\sqrt{x}$ ontstaat.
- Pas hierop de translatie $T(0, -3)$ toe, dan vind je de grafiek van $g: y = -3\sqrt{x+3}$ welke werd gevraagd.



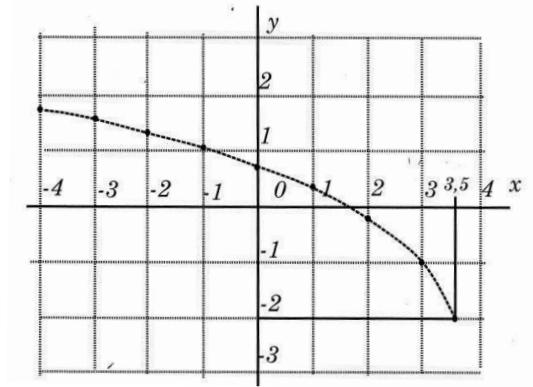
- b. Uit de figuur is direct af te leiden dat het startpunt van $f: y = \sqrt{x-3} - 2$ het **beeldpunt** $(3, -2)$ is van het origineel $(0,0)$ van $h: y = \sqrt{x}$ (bij de translatie $T(3, -2)$)
Zo is het beeldpunt $(-3, 0)$ van $P(x\text{-as}, -3)$ het startpunt van $g: y = -3\sqrt{x+3}$.

- c. - Linkergrens van het *domein* van de standaardgrafiek $h: y = \sqrt{x}$ is de oorsprong $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $D_h = [0, \rightarrow)$. Het domein van f is dan $D_f = [3, \rightarrow)$.
Linkergrens van het bereik van h is $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $B_h = [0, \rightarrow)$.
Het bereik van g is dan $B_g = [-2, \rightarrow)$
- Linkergrens van het *domein* van $i: y = -3\sqrt{x}$ is $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $D_i = [0, \rightarrow)$. Het domein van g is dan $D_g = [-3, \rightarrow)$.
Linkergrens van het *bereik* van i is $O(0,0)$, de rechtergrens is ∞ , dus $D_i = [0, \rightarrow)$.
Het bereik van g is dan: $B_g = \langle \leftarrow, 0 \right]$.

NB: Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:

- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$ (andere waarden onveranderd laten)
- De tabel van de grafiek geeft *vanaf* $X = 4$ 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x}$ niet bestaat. Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* $X = 3,6$
- Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR dus niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Een beginpunt moet dus handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$, dus is van het startpunt $x = 3,5$ waarbij dan $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$.



Beginpunt van f: $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$ is dus het punt $S(3,5; -2)$

Het domein van de functie is $\langle \leftarrow; 3,5 \right]$, het bereik is dan $[-2, \rightarrow)$
Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel:

x	3,5	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
y	-2,00	-1,00	-0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt:
 $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x + 3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

1. $f(x) = 3 + \sqrt{8 - 4x}$

Er moet gelden: $8 - 4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow x \leq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het punt **(2, 3)**.

Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2 \right]$, bereik $B_f = [3, \rightarrow)$

2. $g(x) = 3 + \sqrt{4x - 8}$

Hier moet gelden: $4x - 8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.

Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het punt **(2, 3)**

Domein $D_g = [2, \rightarrow)$, bereik $B_g = [3, \rightarrow)$

3. $h(x) = 5 - \sqrt{2x + 6}$

$2x + 6 \geq 0$ dus $x \geq -3$ Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2 \cdot (-3) + 6} = 5 \Rightarrow$ beginpunt is dus het punt **(-3, 5)**

Domein $D_h = [-3, \rightarrow)$, bereik $B_h = [\leftarrow, 5]$.

5. Exponentiële functies

Na de machtsfunctie $f(x) = x^a$ met vaste exponent a en variabel grondtal x , bestaat 'omgekeerd' een **exponentiële functie** $f(x) = a^x$ met vast grondtal a en variabele exponent x .

Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$)

Voor $a \leq 0$ is de functie niet gedefinieerd.

Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke x , dus is a^x geen functie. Als $a < 0$ dan bestaat a^x niet voor alle waarden van x . Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; ongedefinieerd als a negatief is.

Bij elke exponent x , is de waarde van a^x ($a > 0$) steeds positief want:

- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ want per definitie is $a^x = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (x -maal)
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

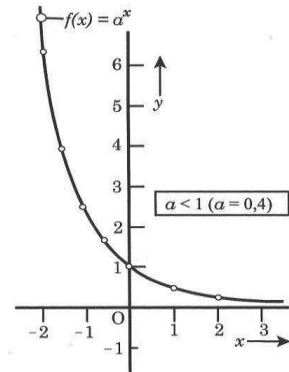
Alle grafieken $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en derde kwadrant*.

Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle* grafieken door *het punt* $(0,1)$.

Beschouw nu de functie $f(x) = a^x$ voor waarden van a , met $0 < a < 1$ en $a > 1$:

1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)

Voor $0 < a < 1$ is de functie **monotoon dalend**, dus bij *toenemende* x neemt y af. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a < 1$ is $a \cdot a^x < a^x$ dus $a^{x+1} < a^x$ zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt*.

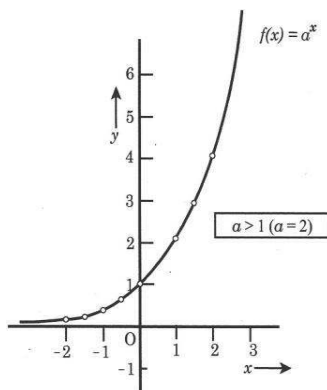


Bij *onbepaald grote toename* van x , dus 'als x tot oneindig nadert', notatie $x \rightarrow \infty$, dan nadert a^x onbepaald tot nul omdat $0 < a < 1$ dus de waarde van a^x bij toenemende x steeds verder afneemt.

De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen x waarvoor a^x gelijk is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichtter tot de *positieve x-as* (rechts van O) nadert *zonder hem ooit te raken*:

De x -as heet dan een (horizontale) **asymptoot** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)

2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)



Als $a > 1$ dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$ en daar $a > 1$ is dan $a \cdot a^x > a^x$ dus $a^{x+1} > a^x \Rightarrow f(x) = a^x$ is dan *monotoon stijgend*. Bij *afnemende waarden* van x wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.

Bij onbepaald grote afname van x nadert a^x dan onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij afnemende x de grafiek steeds dichtter tot de *negatieve x-as* (links van O) naderen: De x -as is hier een *horizontale asymptoot*.

- Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**.

Werk je hiermee de onderste rij van de tabel uit, dan vind je:

<i>aantal</i> $\times 10^6$	164	183 $= 1,11 \times$ 164	203 $= 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	227 $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	254 $= 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11$ $\times 1,11 \times$ 164	282
	$1,11^0 \times 164$	$1,11^1 \times 164$	$1,11^2 \times 164$	$1,11^3 \times 164$	$1,11^4 \times 164$	$1,11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groefactor* 1,11 na t perioden van 4 jaar ($t = 0, 1, 2, 3, 4$) de *beginwaarde* 164 (dus na $t = 0$ perioden) met een factor $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$ is *toegenomen*. Dus t perioden na de *startwaarde* 160 is die waarde *toegenomen* tot **$1,11^t \cdot 164$** .

Deze toename wordt *exponentiële groei* genoemd.

Noemen we de *startwaarde* $164 = N(0)$ en de *groefactor per periode* $1,11 = g$ dan is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie* van t .

Bij exponentiële groei waarbij de groefactor g in gelijke perioden constant is, is na t perioden: $N(t) = N(0) \cdot g^t$ ($N(0) = \text{startwaarde}$)

Toepassingen:

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:

- de *groefactor* per kwartier
- de *groefactor* en het *groeipercentage* per uur
- het *groeipercentage* per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot $1,12 \times$ de startwaarde (= 1).

De *groefactor per kwartier* is dan $1,12 : 1 = 1,12$.

b. De *groefactor per uur* is $1,12^4 = 1,574$; het *groeipercentage* is dan **57,4%**

c. De *groefactor* in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$ dus het *groeipercentage* per vijf minuten is dan $\approx 3,85\%$

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op $t = 4$ zijn er 50.000 bacteriën, op $t = 8$ zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.

Bereken *groefactor* en *groeipercentage* per uur en de *groefactor* per dag.

De *groefactor* g is in vier uur $\frac{130.000}{50.000} = 2,6$, dus *per uur* $(2,6)^{\frac{1}{4}} \approx 1,269$.

Het *groeipercentage* per uur is dan $\approx 26,9\%$

Per dag is dan de *groefactor* $1,269^{24} \approx 304$.

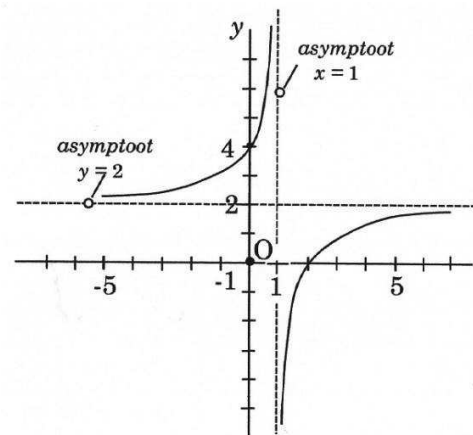
6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtsfuncties zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen. Hiervan twee voorbeelden:

1. $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is. Verder volgt uit $x = 0 \Rightarrow y = 4$ en uit $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$ dus $x = 2$ zodat de grafiek de x -as snijdt in het punt $(2,0)$ en de y -as in $(0,4)$.



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je (na kegelsneden op blz.168) zult herkennen als de *twee takken* van een *hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ en dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken naderen tot de lijn $x = 1$. De functie heeft dus een *horizontale asymptoot* $y = 2$ en een *verticale asymptoot* $x = 1$. (Gr.'symptootos' = samenvallend). De functie heet **discontinu** in het punt met $x = 1$.

*)

Toelichting asymptoten:

- Hoe dichter x tot de waarde 1 nadert (van links of van rechts), hoe dichter de noemer $x - 1$ tot nul nadert en hoe dichter $f(x)$ tot de limiet $\pm \infty$ nadert, want hoe kleiner de noemer, hoe groter de waarde van $y = \frac{2x-4}{x-1}$. De lijn $x = 1$ heet *verticale asymptoot* van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

- Kies je voor x : $x = \pm 10^{100}$ (= 1 googol, grootst benoemde getal in de wiskunde dat binnen het vwo vaak als benadering voor oneindig $= \infty$ wordt gebruikt.), dan is:

$$y = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2 \cdot \pm 10^{100} - 4}{\pm 10^{100} - 1} \approx \frac{2 \cdot \pm 10^{100}}{\pm 10^{100}} \approx 2.$$

Als dus x nadert tot $\pm \infty$ dan nadert de functiewaarde van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ onbepaald dicht tot 2.

De lijn $y = 2$ heet dan een *horizontale asymptoot* van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

*) Na *limieten en continuïteit* aan het einde van dit hoofdstuk, (blz.37) zal het begrip asymptoot exact worden omschreven. In opgabe 2 hierna wordt ook een 'scheve asymptoot' behandeld.

$$2. f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$$

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ in $x = -1$ onderbroken is: De functie is dus **discontinu** in $x = -1$.

- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$

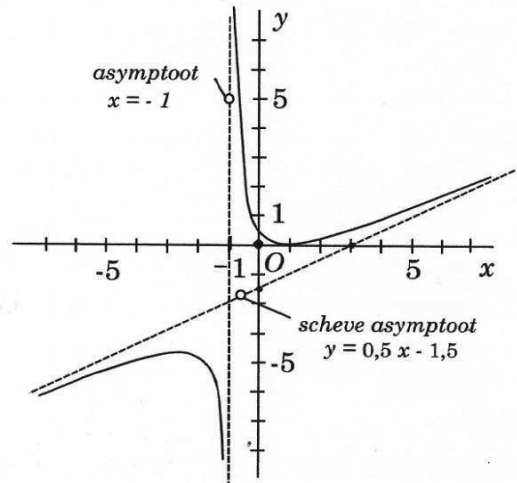
en $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$, dus het punt $(0; 0,5)$.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met

$y = 0$, dus als $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$ met twee *samenvallende wortels*: $x = 1$.

Punt $(1, 0)$ is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.



- De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:

Als x van links nadert tot -1 ($x < -1$), dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1-\delta) + 1 = -\delta$ dus **vanaf links tot 0**.

De waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan tot $-\infty \Rightarrow x = -1$ is een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

- Ook van de rechtertak is de lijn $x = -1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1 ($x > -1$) dan nadert de noemer van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ tot $(-1+\delta) + 1 = \delta$ dus tot 0. *)

De waarde van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan **van rechts tot $+\infty$** dus $x = -1$ is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$ als x tot plus of min oneindig nadert niet direct is te bepalen herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \overline{) 0,5x^2 - x + 0,5} \\ \underline{0,5x^2 + 0,5x} \\ -1,5x - 1,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}$$

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $y = 0,5x - 1,5$ omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = 0$

De lijn met vergelijking $y = 0,5x - 1,5$ heet nu een *scheve asymptoot* van de gegeven functie.

* Het getal δ (delta) wordt algemeen gebruikt om een zeer kleine, tot nul naderende positieve waarde, aan te geven.

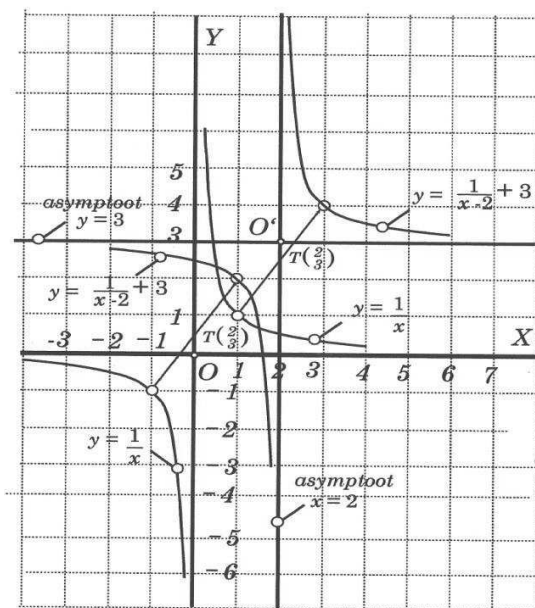
3. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie $T(2,3)$ toe te passen op de *standaardhyperbool* $g: y = \frac{1}{x}$ volgens de translatietransformatie-regel. (blz.11)

De horizontale asymptoot van $g: y = \frac{1}{x}$ is de x -as met vergelijking $y = 0$, de verticale asymptoot is de y -as met vergelijking $x = 0$.

Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $y = 0$ over in $y = 0 + 3 = 3$ en de vergelijking $x = 0$ in $x = 0 + 2 = 2$

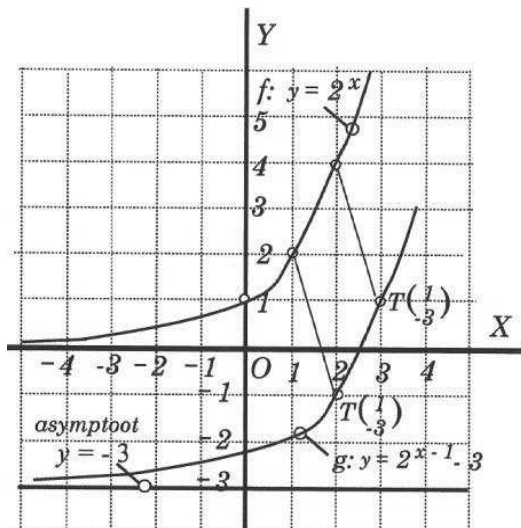
De lijn $y = 3$ is dus *horizontale asymptoot*, $x = 2$ is de *verticale asymptoot* van $f: y = \frac{1}{x-2} + 3$.



7. Grafieken van exponentiële functies

1. $f(x) = 2^{x-1} - 3$

De grafiek van deze exponentiële functie ontstaat uit de standaard-grafiek $g: y = 2^x$ via de translatie $T(1, -3)$.



Horizontale asymptoot van $f: y = 2^x$ is de x -as, dus de lijn $y = 0$. De *horizontale asymptoot* van $g: y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $y = 0 - 3 = -3$. Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$ bestaat niet.

Het *domein* van f (alle waarden van x waarvoor de functie 2^x is gedefinieerd) is \mathbb{R} , dus is \mathbb{R} het *domein* van g .

Het bereik van f (alle functiewaarden die 2^x kan aannemen) is $(0, \infty)$, dus $(-3, \infty)$ is het *bereik* van g .

2. $f(x) = 2^{x+3} - 4$

- a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek van een exponentiële functie ?
- b. Bepaal het domein en bereik van f

a. De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de grafiek van $g(x) = 2^x$ via de translatie $T(-3, -4)$ (blz.11)

b. Het domein van $g(x) = 2^x = \mathbb{R}$ dus is ook \mathbb{R} **het domein van $f: y = 2^{x+3} - 4$**

Het bereik van $g(x) = 2^x$ is $(0, \infty)$, dus van $f: y = 2^{x+3} - 4$ is het **bereik $(-4, \infty)$** .

8 . Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen als bij voorbeeld $17^x = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet exact oplossen. Alleen door ‘proberen’ met een rekenmachine is een *benadering* mogelijk.

Men heeft daarom het begrip *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme van een getal a* is het *getal p* waarvoor $10^p = a$.

Definitie: **log a = p als $10^p = a$.**

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de *logaritme van 100* = 2. Notatie: $\log 100 = 2$.

$1000 = 10^3$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$; $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De *logaritmen van getallen a* met **a ≤ 0 bestaan niet** want er is geen *getal p* waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$.

Briggs berekende de *logaritmen van alle viercijferige getallen* en verzamelde ze in ‘logaritmetafels’. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal **10** *)

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal g* voor *logaritmen* dienen, maar in feite *elk positief reëel getal*.

Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal 3* zeggen: $\log 9 = 2$.

Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^3 \log 9 = 2$.

Zo is ${}^5 \log 125 = 3$ want $5^3 = 125$; ${}^{1/3} \log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, etc.

Men definieert dan: **${}^g \log a = x$ als $g^x = a$** ($g > 0$ als *grondtal* van een exponentiële functie volgens blz.15). Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als $a \leq 0$ dan bestaat ${}^g \log a$ niet**

Algemeen geldt:

*De ${}^g \log a$ van een getal a is gedefinieerd door: **${}^g \log a = x$ als $g^x = a$** (a en $g > 0$)*

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later het ‘**Getal van Euler**’ = **e** in voor het *grondtal g* van de *logaritmen*. ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$)

Logaritmen met dit grondtal noemt men *Neperiaanse- of natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.

Notatie voor *logaritmen met grondtal e* is **ln x**, zodat dus **ln x = $e \log x$** .

*Log x is de Briggse-logaritme van x met 10 als grondtal, dus $\log x = {}^{10} \log x$
ln x is de natuurlijke logaritme met grondtal e, dus $\ln x = {}^e \log x$
Als $\log x = p$ dan is $10^p = x$, als $\ln x = p$ dan is $e^p = x$*

*) Zo berekende Briggs handmatig de wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig! Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$, is $\log 3,16227766\dots = 0,5$; $\sqrt[3]{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$ dus $\log 1,77827941\dots = 0,25$ enz..
En dit was nog maar een begin...

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

1. ${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$
2. ${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$
3. ${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$
4. a : ${}_g \log(g^x) = x$ en b :- $g \cdot {}_g \log x = x$

Bewijs:

1. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is per definitie $g^p = a$ en $g^q = b$ met gevolg: $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$, odat ${}_g \log ab = p + q$ dus: **${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$** .
2. Noem ${}_g \log a = p$ en ${}_g \log b = q$ dan is $g^p = a$, $g^q = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$ zodat ${}_g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow$ **${}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$** .
3. Als ${}_g \log a = p$ dan $g^p = a$ en $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}_g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}_g \log a$ dus **${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$** .
- 4 - a : ${}_g \log(g^x) = x \cdot {}_g \log g$ (volgens 3) $= x \cdot 1 = x$ (want ${}_g \log g = 1$ omdat $g^1 = g$)
 \Rightarrow **${}_g \log(g^x) = x$** .
 - b : Noem ${}_g \log x = p$ dus $g^p = x$ dan is $g^{g \log x} = g^p = x \Rightarrow$ **$g \cdot {}_g \log x = x$** .

c. Inverse functies

Het *argument* x van een functie $f(x)$ kan zelf een functie $g(x)$ van x zijn zodat $f(x) = f(g(x))$. Voorbeeld:

Noem $g(x) = z$ en $f(z) = y$, dan is **$f(g(x)) = f(z) = y$** .

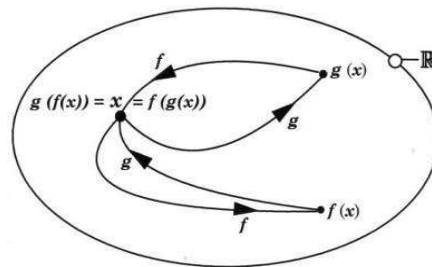
Stel nu dat het g -beeld $g(x)$ van een origineel x , door de functie f wordt 'terug' afgebeeld op het origineel x , dan is dus **$f(g(x)) = x$** .

Als dan 'omgekeerd' het f -beeld $f(x)$ van x door de functie g wordt 'terug' afgebeeld op x , is ook

$g(f(x)) = x$.

Als dit geldt voor *elk element uit het domein* van f en g dus als:

$f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ dan heten f en g elkaars *inverse functies*.



Zijn f en g twee functies in \mathbb{R} waarbij voor elk element x geldt dat $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ dan zijn f en g elkaars inverse functies

Populair uitgedrukt: Als $f(x)$ en $g(x)$ elkaars inverse functies zijn, dan betekent $f(a) = b$ dat (omgekeerd) $g(b) = a$ en als $f(b) = a$, dan $g(a) = b$.

Voorbeeld: De functies $f(x) = x^p$ en $g(x) = \sqrt[p]{x}$ zijn elkaars inversen, want:

$f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$ en ook is: $g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$ dus zijn $f(x) = x^p$

('machtsverheffen') en $g(x) = \sqrt[p]{x}$ ('worteltrekken') elkaars inverse functies, dus betekent. $3^2 = 9$ dat $\sqrt{9} = 3$)

Zo geldt ook:

De logaritmische functie $f(x) = {}^g \log x$ en de exponentiële functie $h(x) = g^x$ zijn elkaars inverse functies

Bewijs:

Noem $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ dan is: $f(h(x)) = f(g^x) = {}^g \log(g^x) = x$ (eig. 4-a) ... (1)

Ook is $h(f(x)) = h({}^g \log x) = g^{{}^g \log x} = x$ (eigenschap 4-b) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan $f(h(x)) = h(f(x)) = x$ dus zijn $f(x) = {}^g \log x$ en $h(x) = g^x$ per definitie elkaars **inverse functies**.

Als f en g elkaars inverse functies zijn, dan zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$

Bewijs:

Als voorbeeld zijn de grafieken getekend van de functies $f(x) = g^x$ en zijn inverse $g(x) = {}^g \log x$.

$P(a,b)$ is een willekeurig punt van $f(x)$ met $f(a) = b$.

Omdat $g(x)$ de inverse functie is van $f(x)$ ligt er dan een punt $Q = (b,a)$ op $g(x)$ dus met $g(b) = a$.

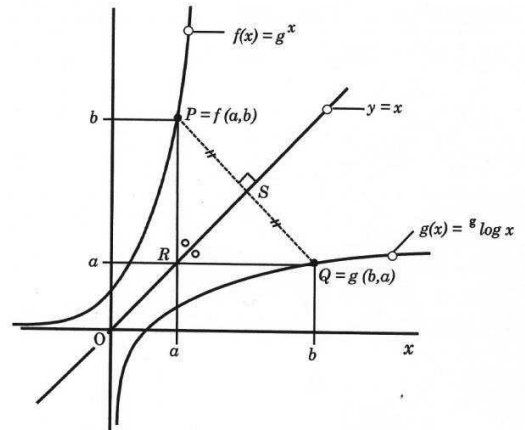
Verder geldt:

$PR = QR = |b - a|$, dus ΔPRQ is gelijkbenig.

De lijn $y = x$ gaat door R , want R is het punt (a,a) . RS (langs $y = x$) is dan in ΔPRQ de bissectrice van $\angle R$ omdat de lijn $y = x$ gelijke hoeken (45°) maakt met de x -as en y -as dus ook met de lijnen $y = a$ en $x = b$, met gevolg:

De bissectrice RS van de gelijkbenige ΔPRQ is de middelloodlijn van PQ omdat $\Delta PRS \cong \Delta QRS$ (ZHZ blz.141) dus P en Q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Omdat $P(a,b)$ een willekeurig punt is op $f(x)$ geldt dit voor alle punten van f en g , ofwel: **f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.**



Opgaven:

1. Bewijs dat algemeen geldt: ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$. (eigenschap 5)

Noem ${}^g \log x = p$ dan is $x = g^p$. Noem $\log x = q$ dan is $x = 10^q$ zodat $g^p = 10^q = x$... (1)

Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r$ zodat $g^p = (10^r)^p = 10^{rp}$ volgens (1)

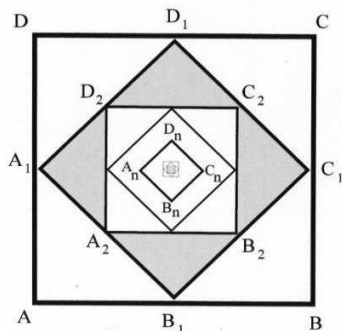
dus $r \cdot p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r}$ ofwel ${}^g \log x = \frac{\log x}{\log g}$

Met deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal* g met de GR TI-83, via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden.

Bij voorbeeld: ${}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} = 2,5789$; ${}^{1/3} \log 37 = \frac{\log 37}{\log 1/3} = -3,2868$

2. De middens van de zijden van een vierkant $ABCD$ zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande tekening. De zijde van $ABCD = 8$.

Bij welke index n zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van $ABCD = 8^2 = 64$. De oppervlakte van elk volgend vierkant is steeds de helft van het vorige vierkant.

Van $A_nB_nC_nD_n$ is dan $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n$. ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Je berekent nu wanneer $O = 64 \times (\frac{1}{2})^n = 0,001$: ... (a)

Uit $64 \times (\frac{1}{2})^n = 0,001$ volgt $\log(64 \times (\frac{1}{2})^n) = \log 0,001$.

Volgens eigenschap 1 en 3 van logaritmen geldt

$\log ab = \log a + \log b$ en $\log a^n = n \cdot \log a$ dus uit (a) volgt:

$$\log(64 \times (\frac{1}{2})^n) = \log 0,001 \Rightarrow$$

$$\log 64 + n \cdot \log \frac{1}{2} = -3 \Rightarrow 1,80168 + n \cdot -0,30103 = -3$$

dus $n = 15,95$ met gevolg:

De oppervlakte van $A_nB_nC_nD_n$ is **kleiner dan 0,001** vanaf de index $n = 16$.

9. Goniometrische functies

a. Definities in de eenheidscirkel

Uitgaande van de definities (blz.142) in een rechthoekige driehoek geldt: **sinus** $\alpha =$

$$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}, \text{cosinus } \alpha = \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}, \text{tangens } \alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

worden nu sinus en cosinus gedefinieerd voor elke willekeurige hoek $\alpha + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Daartoe is de **eenheidscirkel** ingevoerd, een cirkel met **straal $R = 1$** en als middelpunt

$O =$ de oorsprong van het orthonormale coördinatenstelsel XOY .

Elk hoek α wordt daarin voorgesteld door de hoek XOP die het

'vaste been' OX maakt met de 'voerstraal' OP .

Zo is dan $\alpha = 0$ als de voerstraal OP samenvalt met OX .

Als $\alpha > 0$ dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α geroteerd

in tegenwijzerzin, als $\alpha < 0$, dan wordt OP vanuit OX om O

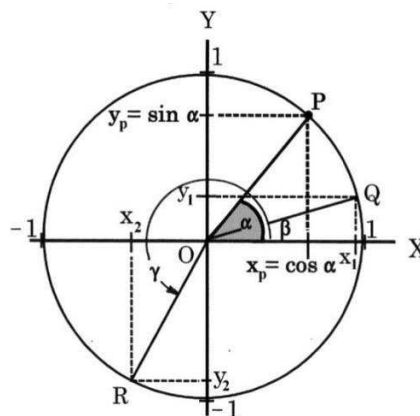
over de hoek α geroteerd in wijzerzin.

Voor de coördinaten van het eindpunt $P(x_p, y_p)$ van de voerstraal

$$OP \text{ geldt dan: } x_p = \frac{x_p}{1} = \frac{x_p}{OP} = \cos \alpha \text{ en } y_p = \frac{y_p}{1} = \frac{y_p}{OP} = \sin \alpha.$$

Omdat nu α elke reële waarde kan aannemen is het domein van

$\sin \alpha$ en $\cos \alpha = \mathbb{R}$, het bereik van $\sin \alpha$ en $\cos \alpha$ is $[-1,1]$



Voor elke hoek α zijn sinus α en cosinus α gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt P van de voerstraal OP van hoek α in de eenheidscirkel, waarbij sinus $\alpha =$ de y -coördinaat y_p van P , cosinus $\alpha =$ de x -coördinaat x_p van P

Voorbeelden: Van $\angle XOP = \alpha$ zijn in de eenheidscirkel **sin** $\alpha = y_p$ en **cos** $\alpha = x_p$ getekend.

Zo is **cos** $\angle XOQ = \cos \beta = x_1$, **sin** $\angle XOQ = \sin \beta = y_1$; **cos** $\angle XOR = \cos \gamma = x_2$, **sin** $\angle XOR =$

$\sin \gamma = y_2$. Verder is $\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$; $\cos 180^\circ = -1$; $\sin 270^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$.

In een rechthoekige driehoek wordt de **tangens** van hoek α gedefinieerd als de verhouding overstaande rechthoekszijde / aanliggende rechthoekszijde. Naar analogie hiervan geldt per definitie in de eenheidscirkel:

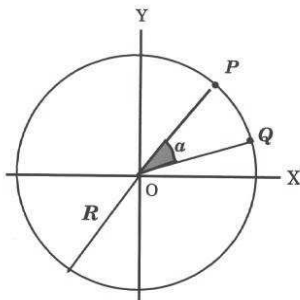
$$\tan \alpha = \frac{y_p}{x_p} \quad (x_p \neq 0) \text{ zodat voor elke reële hoek } \alpha \text{ geldt: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ).$$

Het bereik van $\tan \alpha = \mathbb{R}$.

Na de definities in de eenheidscirkel zijn sinus, cosinus en tangens *functies van een reële variabele* x , dus moeten genoteerd worden als **sin(x)**, **cos(x)** en **tan(x)**. In dit boek zullen wij deze exacte notatie slechts dan gebruiken als x een *samengestelde variabele* is zoals: $\sin(2x)$, $\sin(x^2 - 5)$, $\cos(\frac{3}{5}x)$, ..., maar $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$ noteren we gemakshalve als $\sin x$, $\cos x$ en $\tan(x)$.

b. De radiaal

Een hoek van 1 radiaal is de grootte van de middelpuntshoek die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel



De grootte van een (middelpunts) hoek in radialen is dus gelijk is aan de verhouding $\frac{\text{lengte van de bijbehorende cirkelboog}}{\text{lengte van de straal } R \text{ van die cirkel}}$.

De **standaardeenheid** van hoekgrootte is in de wiskunde:

1 radiaal. De **dimensie** van de radiaal is $\frac{m}{m} = 1$.^{*)}

De *cirkel* (straal = R) heeft een booglengte (= omtrek) van $= 2\pi \cdot R$, dus hoort hierbij een middelpuntshoek in radialen van $\frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi$

met gevolg: $360^\circ = 2\pi$. Als $PQ = \frac{3}{4}R$ dan is $\angle POQ = \alpha = \frac{\frac{3}{4}R}{R} = \frac{3}{4}$.

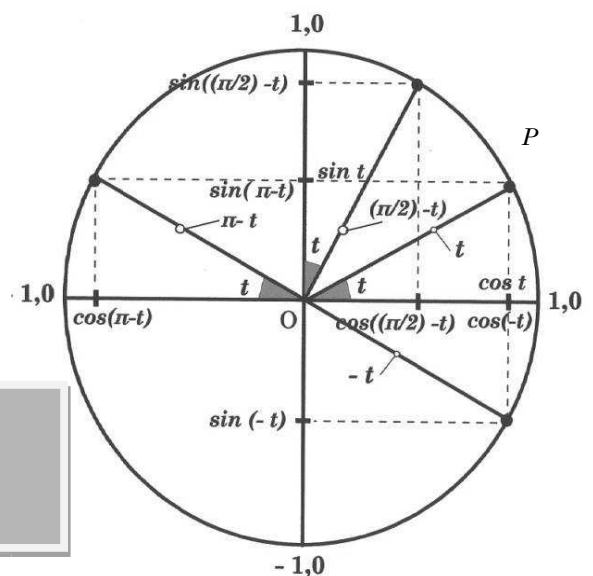
Zo ook:

hoek α in radialen	2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	1	$\pi/180$
hoek α in graden	360°	270°	180°	90°	$180/\pi^\circ$	1°

c. Herleidingformules

Vaak worden in de *goniometrie* ('hoekmeetkunde') *herleidingformules* gebruikt, zoals die voor het **complement** van een hoek (aanvulling tot $90^\circ = \pi/2$ radialen), voor het **supplement** van een hoek (aanvulling tot $180^\circ = \pi$ radialen), voor *dubbele- en halve* hoeken en voor *som of verschil* van twee hoeken. Uit de getekende eenheidscirkel kan je direct aflezen:

$$\begin{aligned} \sin -t &= -\sin t & \cos -t &= \cos t \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) &= \cos t & \cos(\frac{\pi}{2} - t) &= \sin t \\ \sin(\pi - t) &= \sin t & \cos(\pi - t) &= -\cos t \end{aligned}$$



^{*)} Hierdoor is ook de standaardeenheid van hoeken in de GR-TI83 ingesteld in *radialen* (Radians). Via de knop MODE kun je dit zo nodig direct veranderen in graden (Degrees).

Ook volgt direct uit de definitie van $\sin t$ en $\cos t$ in de eenheidscirkel de eigenschap: *)

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Immers:

Volgens *Pythagoras* geldt voor de coördinaten x_p, y_p van punt P van de voerstraal $OP = R$ in de eenheidscirkel, dat: $x_p^2 + y_p^2 = OP^2 = R^2 = 1$, zodat **$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$**

- Sinus en cosinus van som en verschil

1. $\sin(t + u) = \sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u$
2. $\cos(t + u) = \cos t \cdot \cos u - \sin t \cdot \sin u$
3. $\sin(t - u) = \sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u$
4. $\cos(t - u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u$
5. $\tan(t + u) = \frac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t \cdot \tan u}$

Bewijs:

1. In de rechthoekige driehoeken ABC en ADB zijn $\angle BAC = t$ en $\angle BAD = u$ aangegeven.

Zijde DB van $\triangle ADB$ is verlengd met BE zodat een rechthoekige $\triangle BEC$ ontstaat.

Omdat in $\triangle ADB$: $\angle ABD = 90^\circ - u$ geldt in $\triangle BEC$ dat $\angle CBE = 180^\circ - (90^\circ - u) - 90^\circ = u$.

$CF \perp AD$ is een hulplijn.

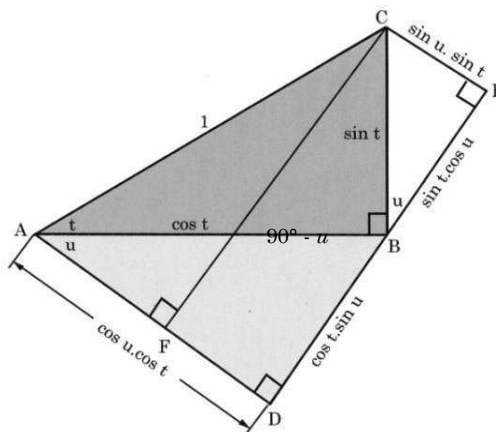
De lengten van alle lijnstukken zijn aangegeven en uitgedrukt in de lengte van zijde $AC = 1$.

Zo is **$BE = \sin t \cdot \cos u$** want in $\triangle BEC$ is $BE = BC \cdot \cos u$ en uit $\triangle ABC$ volgt dat

$BC = \sin t \cdot 1 = \sin t$ zodat **$BE = \sin t \cdot \cos u$** (a)

Zo zijn ook de lengten van de lijnstukken CE, AD en BD herleid, waaruit dan volgt dat **$BD = \cos t \cdot \sin u$** (b)

Uit $\triangle AFC$, met CF loodrecht op AD , volgt dat $\sin \angle CAD = \sin(t + u) = CF/1 = DE = BE + BD$ dus volgens (a) en (b): **$\sin(t + u) = \sin t \cdot \cos u + \cos t \cdot \sin u$**



2. In $\triangle AFC$ geldt $\cos \angle CAF = \cos(t + u) = AF/AC = AF/1 = AF$.

Ook is: $AF = AD - DF = AD - CE$ zodat **$AF = \cos(t + u) = \cos u \cdot \cos t - \sin u \cdot \sin t$** .

3. Vervang je u door $-u$ in eigenschap 1. dan ontstaat

$\sin(t + (-u)) = \sin t \cdot \cos(-u) + \cos t \cdot \sin(-u)$ waarin $\cos(-u) = \cos u$ en $\sin(-u) = -\sin(u)$,

dus **$\sin(t - u) = \sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u$** .

4) Zo volgt uit eigenschap 2.: $\cos(t - u) = \cos(t + (-u)) = \cos t \cdot \cos(-u) - \sin t \cdot \sin(-u)$

dus: **$\cos(t - u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot \sin u$** .

5) **$\tan(t + u) = \frac{\tan t + \tan u}{\tan t \cdot \tan u}$** bewijs op blz.28, opgave 2.

*) $\sin^2(t)$ is een verkorte schrijfwijze voor $(\sin(t))^2$, niet te verwarren met $\sin(t^2)$, Dit geldt ook voor $\cos^2(t)$ en $\tan^2(t)$.