Examentraining wiskunde vwo-B

Deze nieuwe uitgave geeft in vijf geordende hoofdstukken een overzicht van de belangrijkste formules, regels, wetten en eigenschapen van alle onderdelen van het eindexamen vwo-wiskunde B. Elk hoofdstuk behandelt met voorbeeldopgaven op examenniveau, de hoofdzaken van het betreffende onderdeel en wordt gevolgd door een aantal volledig uitgewerkte examenopgaven. Houd er bij oplossingen steeds rekening mee, dat je bij exacte oplossingen geen andere opties van je GR *in examenmodus* mag gebruiken dan uitsluitend het rekenwerk. Als 'exact oplossen' (of 'algebraïsch oplossen') *niet expliciet* in de opgave wordt gevraagd, dan mag dit wel, en wordt meestal het nodige aantal decimalen van het antwoord opgegeven. Bedenk daarbij dan dat je *geen tussenwaarden afrondt*, maar *alleen het eindantwoord*. Wordt in het examen gevraagd om iets *aan te tonen dan mag je* ook de opties van je *GR* gebruiken, bij iets *bewijzen* mag dat niet.

Inhoud:

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Grootste wiskundig genie aller tijden, de 'Mozart van de Wiskunde'. Verrichte veel baanbrekend werk zowel in de wiskunde als in de natuurkunde. Beschreef op dertigjarige leeftijd de exacte meetkundige constructie van een zeventienhoek, vond de formule voor de 'Kromme van Gauss" $A = \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{\frac{1}{2}z^2}$ *betreffende normale verdelingen en standaarddeviaties en had een groot aandeel in de niet- euclidische meetkunde van Riemann.*

I *Algemene vaardigheden*

a. Herleiden van algebraïsche vormen

1. *Merkwaardige producten*

● Vaak moeten de *haakjes* in vormen zoals $(2x - 3)^2$, $(x + 5)^2$, $(x^3 + 2y).(x^3 - 2y)$ *worden weggewerkt* met de *merkwaardige producten*:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B).(A-B) = A^2 - B^2$$

Hierin heet $2AB$ het *dubbelproduct* van A en B

Voorbeelden: $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$; $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$;
$(x^3 + 2y).(x^3 - 2y) = x^6 - 4y^2$

● Ook voor *het herleiden van breuken* zijn de merkwaardige producten vaak nodig:

$\frac{x^6-16}{x^3+4} = \frac{(x^3-4).(x^3+4)}{x^3+4} = \boldsymbol{x^3 - 4}$ *mits* $x^3 + 4 \neq \mathbf{0}$ dus $\boldsymbol{x \neq \sqrt[3]{-4}}$ en

$\frac{p^4-10p^2+25}{p^4-25} = \frac{(p^2-5)^2}{(p^2+5).(p^2-5)} = \frac{p^2-5}{p^2+5}$ mits $p^2 + 5 \neq 0$, dus $p \neq \pm\sqrt{5}$

● Bij het *herleiden van wortelvormen* gebruik je de volgende rekenregels:

$$\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B} \quad \text{mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0$$
$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad \text{mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0$$
$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}$

$\sqrt{54} - \frac{8\sqrt{30}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = -\sqrt{\mathbf{6}}$

$\sqrt{\frac{8}{9}a^2} = \sqrt{\frac{4}{9}a^2.2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\,|\boldsymbol{a}|\sqrt{\mathbf{2}}$

$(2a - \sqrt{3})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{3} + 3$

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}-\sqrt{20}}{5-2} = \frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5-2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{5}}$

Hoe vind je bijvoorbeeld dat $\sqrt{\mathbf{80}} = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{5}}$??
Probeer na elkaar of je 80 kunt *delen door een kwadraat:* 2^2… , 3^2…, $\mathbf{4^2}$, ..
'Bingo': 80 : 16 = 5, dus $\sqrt{80} = \sqrt{16}.\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

● Bij het *herleiden* van *vormen met breuken* gebruik je de volgende regels:

$\frac{A}{B} + C = \frac{A+BC}{B}$

$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$

$A.\frac{B}{C} = \frac{AB}{C} = \frac{A}{C}.B = A.B.\frac{1}{C}$

$\boldsymbol{\frac{A}{B}.\frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}}$

$\boldsymbol{\frac{\frac{A}{B}}{C} = A.\frac{C}{B} = \frac{AC}{B}}$ *mits* $B \neq \mathbf{0}$

- Bij het *herleiden van machten* gebruik je de algemene eigenschappen:

$$a^p . a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p . b^q$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \text{ (want } a^0 = 1) \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}$$

$\frac{9^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{(3^2)^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{3^{2x-2}}{3^{x-2}} = 3^{(2x-2)-(x-2)} = \mathbf{3^x}$;

$(3x^{\frac{4}{5}})^2 = 9.\, x^{\frac{8}{5}} = 9.x^{1\frac{3}{5}} = 9\, x^{1+\frac{3}{5}} = \mathbf{9\, x.\sqrt[5]{x^3}}$

2. *Vergelijkingen oplossen*

- ***Eerstegraadsvergelijkingen***

1. Werk haakjes en breuken weg en herleid de vergelijking tot $f(x) = 0$
2. Deel linker- en rechterterm door de coëfficiënt van x

$3(x-5) + 2(2x - \frac{3}{2}) = -4\ (\frac{1}{2}x - 1) + 4x + 10$

$3x - 15 + 4x - 3 = -6x + 4 + 4x + 10$

$7x - 18 = -2x + 14$

$9x = 32 \Rightarrow x = \mathbf{\frac{32}{9}} = \mathbf{3\frac{5}{9}}$

- ***Tweedegraadsvergelijkingen***

De **abc-formule**

$ax^2 + bx + c = 0$ met $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

- $ax^2 + bx = 0$. Breng x buiten haakjes.
- $ax^2 + c = 0$. Herleid de vorm tot $x^2 = \frac{-c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = 0$ en het *linkerlid is te ontbinden in factoren*, zoals
  1. Als $a = 1$: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - p).(x - q) = 0$ waarin $p.\, q = 6$ en $p + q = -5$, dus: $p = -3,\ q = -2 \Rightarrow (x + p).(x + q) = (x - 3).(x - 2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 3 \vee x = 2.}$
  2. Als $a \neq 1$: $8x^2 + 2x - 1 = 0$ dus in $p_1.p_2\, x^2 + 2x + q_1.q_2$ is $p_1.p_2 = 8$ en $q_1.\, q_2 = -1$. Probeer $q_1 = -1$, $q_2 = 1$ of $q_1 = 1$, $q_2 = -1$ en zoek daarna uit of $p_1 = \pm 2$ en $p_2 = \pm 4$ of $p_1 = \pm 4$ en $p_2 = \pm 2$. Je vindt dan uit $8x^2 - 2x - 1 = (p_1.x + q_1).\ (p_2.x + q_2) = 0 = (2x - 1).\ (4x + 1) \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{4}}$
- $ax^2 + bx + c = 0$ en het *linkerlid is niet te ontbinden in factoren.* Gebruik de *abc-formule* of ga *kwadraat afsplitsen.*

- ***Hogeregraadsvergelijkingen***

n oneven: $x^n = p$ *geeft:* $\mathbf{x = \sqrt[n]{p}}$

n even en $p > 0$ $\quad x^n = p$ *geeft* $\mathbf{x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}}$

n even en $p < 0$ $\quad x^n = p$ heeft *geen oplossing* in de verzameling reële getallen.

○ *Derdegraads vergelijkingen* zoals $x^3 - x^2 - 2x = 0$.

Breng x buiten haakjes en los dan op: $x^3 - x^2 - 2x = x\,(x^2 - x - 2)$ en verder ontbinden in factoren geeft dit $x\,(x^2 - x - 2) = x\,(x - 2).(x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2}$.

Bij een vierdegraadsvergelijking zoals $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ breng je x^2 *buiten haakjes.*

○ *Vierdegraads vergelijkingen* zoals $x^4 - x^2 - 2 = 0$ los je op door $x^2 = u$ te stellen.

Je krijgt dan: $u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow (u + 1).(u - 2) = 0$ dus

$x^2 = -1$ voldoet niet $\vee\ x^2 = 2 \Rightarrow \boldsymbol{x = \sqrt{2}} \ \vee\ \boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$

• *Modulusvergelijkingen*

$\lvert A \rvert = B$ *met* $B \geq 0$ geeft $A = B \vee A = -B$	
$\lvert A \rvert = B$ *met* $B < 0$ heeft geen oplossing	

Uit de vergelijking $\lvert x^2 - 10 \rvert = 2$ volgt $x^2 - 10 = 2 \vee x^2 - 10 = -2 \Rightarrow$
$x^2 = 12 \vee x^2 = 8$ dus $x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

• *Wortelvergelijkingen*

Wortelvergelijkingen los je algebraïsch op in drie stappen:

- Isoleer de wortelvorm, dus zet hem apart
- Kwadrateer linker- en rechterlid en los de vergelijking op
- Ga na of alle oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de gegeven wortelvergelijking

Voorbeeld:

$2x - \sqrt{x-1} = 5 \Rightarrow 2x - 5 = \sqrt{x-1}$. Kwadrateren geeft

$4x^2 - 20x + 25 = x - 1$

$4x^2 - 21x + 26 = 0$ Oplossen met de abc-formule:

$D = (-21)^2 - 4.4.26 = 441 - 416 = 25$

$x = \frac{21-5}{8} = 2 \vee x = \frac{21+5}{8} = \frac{13}{4}$

$\boldsymbol{x = 2}$ in $2x - \sqrt{x-1} = 5$ geeft $4 - 1 = 5$ dus ***voldoet niet***

$\boldsymbol{x = \frac{13}{4}}$ in $2x - \sqrt{x-1} = 5$ geeft $\frac{26}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{26}{4} - \frac{3}{2} = \frac{20}{4} = \boldsymbol{5}$ **voldoet.**

• *Gebroken vergelijkingen*

Voorbeeld: $\dfrac{2x^2-6}{x^2+2} = \dfrac{x^2-3}{x^2-5} \Rightarrow$

$\dfrac{2x^2-6}{x^2+2} = \dfrac{2x^2-6}{2x^2-10} \Rightarrow 2x^2 - 6 = 0 \vee x^2 + 2 = 2x^2 - 10$

$2x^2 = 6 \lor -x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 3 \lor x^2 = 12$

$\boldsymbol{x = \sqrt{3}} \lor \boldsymbol{x = -\sqrt{3}} \lor \boldsymbol{x = 2\sqrt{3}} \lor \boldsymbol{x = -2\sqrt{3}}$ Alle waarden voldoen..

• *Stelsels vergelijkingen*

○ *Elimineren door coëfficiënten gelijk te maken*

Deze methode wordt meestal gebruikt bij een *stelsel lineaire vergelijkingen*

zoals $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \begin{array}{|c|} 1 \\ 3 \end{array}$ $\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \\ \hline 5x = 20 \quad + \end{array}$

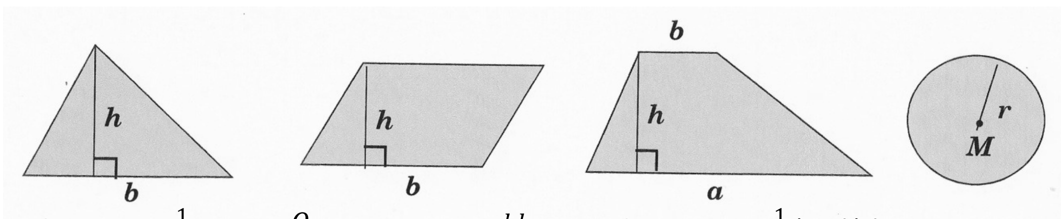
$x = 4$ en $x - y = 5$ geeft $y = -1$, dus **$(x,y) = (4, -1)$**

○ *Elimineren door substitueren*

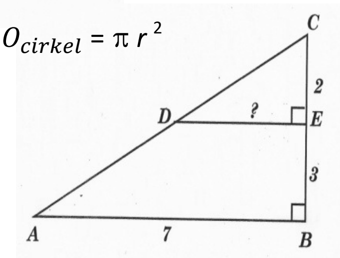
Deze methode gebruik je als elimineren niet lukt zoals bijvoorbeeld bij
$2x + 3y = 5 \land x^2 + y^2 = 13$
Uit $2x + 3y = 5$ volgt $2x = -3y + 5 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$ zodat
uit $x^2 + y^2 = 13$ volgt $(-\frac{3}{2}y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 13$
$\frac{9}{4}y^2 - \frac{15}{2}y + \frac{25}{4} + y^2 = 13 \Rightarrow \frac{13}{4}y^2 - \frac{15}{2}y - \frac{27}{4} = 0.$
$13y^2 - 30y - 27 = 0.$ *Met de abc-formule*:
$D = (-30)^2 - 4.13. - 27 = 2304 \Rightarrow y = \frac{30+48}{26} = \mathbf{3} \lor y = \frac{30-48}{26} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{13}}$ dus uit
$x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.3 + \frac{5}{2} = \mathbf{-2} \lor x = -\frac{3}{2}. -\frac{9}{13} + \frac{5}{2} = \frac{\mathbf{46}}{\mathbf{13}}$
$(x,y) = (-2, 3)$ $\lor$ **$(x,y) = (\frac{46}{13}, -\frac{9}{13})$** .

3. *Vlakke figuren*

• *Oppervlakte berekenen*



$O_{driehoek} = \frac{1}{2}bh$ $O_{parallellogram} = bh$ $O_{trapezium} = \frac{1}{2}(a+b)h$ $O_{cirkel} = \pi r^2$



Uit *gelijkvormigheid van driehoeken* kan je vaak *lengten* berekenen.
In deze figuur is $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ waaruit dan de 'evenredigheid' volgt *AB: DE = BC: EC = AC: DC.*