

# *Examentraining wiskunde vwo-B*

Deze nieuwe uitgave geeft in vijf geordende hoofdstukken een overzicht van de belangrijkste formules, regels, wetten en eigenschappen van alle onderdelen van het eindexamen vwo-wiskunde B. Elk hoofdstuk behandelt met voorbeeldopgaven op examenniveau, de hoofdzaken van het betreffende onderdeel en wordt gevolgd door een aantal volledig uitgewerkte examenopgaven. Houd er bij oplossingen steeds rekening mee, dat je bij exacte oplossingen geen andere opties van je GR *in examenmodus* mag gebruiken dan uitsluitend het rekenwerk. Als 'exact oplossen' (of 'algebraïsch oplossen') *niet expliciet* in de opgave wordt gevraagd, dan mag dit wel, en wordt meestal het nodige aantal decimalen van het antwoord opgegeven. Bedenk daarbij dan dat je *geen tussenwaarden afrondt*, maar *alleen het eindantwoord*. Wordt in het examen gevraagd om iets *aan te tonen dan mag je ook de opties van je GR* gebruiken, bij iets *bewijzen* mag dat niet.

Inhoud:

<b>I Algemene vaardigheden</b>	3-14
Herleiden van merkwaardige producten, wortelvormen en breuken	3-4
Oplossen van eerste -, tweede -, derde- en hogeregraadsvergelijkingen	4-5
Oplossen van modulusvergelijkingen, wortelvergelijkingen en gebroken vergelijkingen	5-6
Oplossen van stelsels vergelijkingen	6
Oppervlakte van meetkundige basisfiguren	6-7
Parabolen	7
Transformaties, inverse functies, limieten en perforaties	8-9
Examenopgaven: 1) 2012-I; 2) 2012-I; 3) 2013-I; 4) 2014-I; 5) 2015-I; 6) 2014-II	10-14
<b>II Differentiaal- en integraalrekening</b>	15-22
Algemene regels voor differentiëren	15
Algemene regels voor integreren	16
Extreme waarden en buigpunten van een functie, raaklijnen aan een functie	16-18
Oppervlakte van een figuur en inhoud van een omwentelingslichaam	18
Examenopgaven: 1) 2015-I; 2) 2015-II; 3) 2014-II; 4) 2014-II; 5) 2014-I	18-22
<b>III Exponenten en logaritmen</b>	22-31
Regels voor machten	22
Regels voor logaritmen	23
Exponentiële vergelijkingen oplossen	23
Logaritmische vergelijkingen oplossen	24
Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies	25
Primitieven van exponentiële en logaritmische functies	25
Examenopgaven: 1) 2012-I; 2) 2013-I; 3) 2013-II; 4) 2014-II; 5) 2014-II ; 6) 2015-I	26-31
<b>IV Goniometrie`</b>	32-45
Exacte-waarden-cirkel	32
Formules voor som en verschil; verdubbelingformules	32
Lijn en puntsymmetrie	33
Afgeleiden en primitieven	33
Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen	35-36
Examenopgaven: 1) 2013-I; 2) 2013-I; 3) 2014-I; 4) 2014-II; 5) 2014-II; 6) 2015-II	37-45

<b>V Meetkunde</b>	45-55
Goniometrie, Pythagoras, oppervlakte	45
De sinus en de cosinusregel	45
De hoek tussen twee lijnen	46
Afstanden bij punten en lijnen	46
Cirkelvergelijkingen	46
Cirkels en raaklijnen	46
Vectorrotaties over negentig graden	47
Bewegingsvergelijkingen	48
Zwaartepunten en vectoren	49
Examenopgaven: 1) 2012-I; 2) 2012-I; 3) 2012-II; 4) 2014-I; 5) 2015-I; 6); 2015-II	49-55



*Carl Friedrich Gauss (1777-1855)*

*Grootste wiskundig genie aller tijden, de 'Mozart van de Wiskunde'. Verrichte veel baanbrekend werk zowel in de wiskunde als in de natuurkunde. Beschreef op dertigjarige leeftijd de exacte meetkundige constructie van een zeventienhoek, vond de formule voor de 'Kromme van Gauss'  $A = \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$  betreffende normale verdelingen en standaarddeviaties en had een groot aandeel in de niet-euclidische meetkunde van Riemann.*

# I Algemene vaardigheden

## a. Herleiden van algebraïsche vormen

### 1. Merkwaardige producten

- Vaak moeten de haakjes in vormen zoals  $(2x - 3)^2$ ,  $(x + 5)^2$ ,  $(x^3 + 2y) \cdot (x^3 - 2y)$  worden weggewerkt met de merkwaardige producten:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A - B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\ (A + B) \cdot (A - B) &= A^2 - B^2\end{aligned}$$

Hierin heet  $2AB$  het *dubbelproduct* van  $A$  en  $B$

Voorbeelden:  $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ ;  $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ ;  
 $(x^3 + 2y) \cdot (x^3 - 2y) = x^6 - 4y^2$

- Ook voor het herleiden van breuken zijn de merkwaardige producten vaak nodig:

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - 16}{x^3 + 4} &= \frac{(x^3 - 4) \cdot (x^3 + 4)}{x^3 + 4} = x^3 - 4 \text{ mits } x^3 + 4 \neq 0 \text{ dus } x \neq \sqrt[3]{-4} \text{ en} \\ \frac{p^4 - 10p^2 + 25}{p^4 - 25} &= \frac{(p^2 - 5)^2}{(p^2 + 5) \cdot (p^2 - 5)} = \frac{p^2 - 5}{p^2 + 5} \text{ mits } p^2 + 5 \neq 0, \text{ dus } p \neq \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

- Bij het herleiden van wortelvormen gebruik je de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned}\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} &= \sqrt{A \cdot B} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0 \\ \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0 \\ \sqrt{A^2} &= |A|\end{aligned}$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{54} - \frac{8\sqrt{30}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{8}{9}a^2} = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 \cdot 2} = \frac{2}{3}|a|\sqrt{2}$$

$$(2a - \sqrt{3})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{3} + 3$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{20}}{5 - 2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{5 - 2} = \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Hoe vind je bijvoorbeeld dat  $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$  ??  
 Probeer na elkaar of je 80 kunt delen door een kwadraat:  $2^2, \dots, 3^2, \dots, 4^2, \dots$   
 'Bingo':  $80 : 16 = 5$ , dus  $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

- Bij het herleiden van vormen met breuken gebruik je de volgende regels:

$$\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

$$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{\frac{B}{C}} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{AC}{B} \text{ mits } B \neq 0$$

- Bij het *herleiden van machten* gebruik je de algemene eigenschappen:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad (ab)^p = a^p \cdot b^p$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad (\text{want } a^0 = 1) \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$\frac{9^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{(3^2)^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{3^{2x-2}}{3^{x-2}} = 3^{(2x-2)-(x-2)} = 3^x;$$

$$(3x^{\frac{4}{5}})^2 = 9 \cdot x^{\frac{8}{5}} = 9 \cdot x^{1\frac{3}{5}} = 9 x^{1+\frac{3}{5}} = 9 x \cdot \sqrt[5]{x^3}$$

## 2. Vergelijkingen oplossen

### • Eerstegraadsvergelijkingen

1. Werk haakjes en breuken weg en herleid de vergelijking tot  $f(x) = 0$
2. Deel linker- en rechterterm door de coëfficiënt van  $x$

$$3(x-5) + 2(2x - \frac{3}{2}) = -4(\frac{1}{2}x - 1) + 4x + 10$$

$$3x - 15 + 4x - 3 = -6x + 4 + 4x + 10$$

$$7x - 18 = -2x + 14$$

$$9x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$$

### • Tweedegraadsvergelijkingen

**De abc-formule**

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ met } D = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

- $ax^2 + bx = 0$ . Breng  $x$  buiten haakjes.
- $ax^2 + c = 0$ . Herleid de vorm tot  $x^2 = \frac{-c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = 0$  en het *linkerlid is te ontbinden in factoren*, zoals
  1. Als  $a = 1$ :  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x - p) \cdot (x - q) = 0$  waarin  $p \cdot q = 6$  en  $p + q = -5$ , dus:  
 $p = -3, q = -2 \Rightarrow (x + 3) \cdot (x + 2) = (x - 3) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = 2.$
  2. Als  $a \neq 1$ :  $8x^2 + 2x - 1 = 0$  dus in  $p_1 \cdot p_2 x^2 + 2x + q_1 \cdot q_2$  is  $p_1 \cdot p_2 = 8$  en  $q_1 \cdot q_2 = -1$ . Probeer  $q_1 = -1, q_2 = 1$  of  $q_1 = 1, q_2 = -1$  en zoek daarna uit of  $p_1 = \pm 2$  en  $p_2 = \pm 4$  of  $p_1 = \pm 4$  en  $p_2 = \pm 2$ . Je vindt dan uit  
 $8x^2 - 2x - 1 = (p_1 \cdot x + q_1) \cdot (p_2 \cdot x + q_2) = 0 = (2x - 1) \cdot (4x + 1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{4}$
- $ax^2 + bx + c = 0$  en het *linkerlid is niet te ontbinden in factoren*.  
 Gebruik de *abc-formule* of ga *kwadraat afsplitsen*.

### • Hogeregraadsvergelijkingen

$n$  oneven:  $x^n = p$  geeft:  $x = \sqrt[n]{p}$

$n$  even en  $p > 0$   $x^n = p$  geeft  $x = \sqrt[n]{p} \quad \vee \quad x = -\sqrt[n]{p}$

$n$  even en  $p < 0$   $x^n = p$  heeft geen oplossing in de verzameling reële getallen.

- *Derdegraads vergelijkingen* zoals  $x^3 - x^2 - 2x = 0$ .

Breng  $x$  buiten haakjes en los dan op:  $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$  en verder ontbinden in factoren geeft dit  $x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow$   
 $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$ .

Bij een vierdegraadsvergelijking zoals  $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$  breng je  $x^2$  buiten haakjes.

- *Vierdegraads vergelijkingen* zoals  $x^4 - x^2 - 2 = 0$  los je op door  $x^2 = u$  te stellen.  
Je krijgt dan:  $u^2 - u - 2 = 0 \Rightarrow (u + 1)(u - 2) = 0$  dus  
 $x^2 = -1$  voldoet niet  $\vee x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

### • *Modulusvergelijkingen*

$|A| = B$  met  $B \geq 0$  geeft  $A = B \vee A = -B$   
 $|A| = B$  met  $B < 0$  heeft geen oplossing

Uit de vergelijking  $|x^2 - 10| = 2$  volgt  $x^2 - 10 = 2 \vee x^2 - 10 = -2 \Rightarrow$   
 $x^2 = 12 \vee x^2 = 8$  dus  $x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$

### • *Wortelvergelijkingen*

Wortelvergelijkingen los je algebraïsch op in drie stappen:

- Isoleer de wortelvorm, dus zet hem apart
- Kwadrateer linker- en rechterlid en los de vergelijking op
- Ga na of alle oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de gegeven wortelvergelijking

*Voorbeeld:*

$2x - \sqrt{x-1} = 5 \Rightarrow 2x - 5 = \sqrt{x-1}$ . Kwadrateren geeft

$$4x^2 - 20x + 25 = x - 1$$

$4x^2 - 21x + 26 = 0$  Oplossen met de abc-formule:

$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26 = 441 - 416 = 25$$

$$x = \frac{21-5}{8} = 2 \vee x = \frac{21+5}{8} = \frac{13}{4}$$

$x = 2$  in  $2x - \sqrt{x-1} = 5$  geeft  $4 - 1 = 5$  dus **voldoet niet**

$x = \frac{13}{4}$  in  $2x - \sqrt{x-1} = 5$  geeft  $\frac{26}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{26}{4} - \frac{3}{2} = \frac{20}{4} = 5$  voldoet.

### • *Gebroken vergelijkingen*

*Voorbeeld:*  $\frac{2x^2 - 6}{x^2 + 2} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5} \Rightarrow$

$$\frac{2x^2 - 6}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 - 6}{2x^2 - 10} \Rightarrow 2x^2 - 6 = 0 \vee x^2 + 2 = 2x^2 - 10$$

$$2x^2 = 6 \vee -x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 3 \vee x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \text{ Alle waarden voldoen..}$$

• **Stelsels vergelijkingen**

◦ *Elimineren door coëfficiënten gelijk te maken*

Deze methode wordt meestal gebruikt bij een *stelsel lineaire vergelijkingen*

zoals  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 2x + 3y = 5 & 1 \\ x - y = 5 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \\ \hline 5x = 20 \end{array}$$

$x = 4$  en  $x - y = 5$  geeft  $y = -1$ , dus  $(x,y) = (4, -1)$

◦ *Elimineren door substitueren*

Deze methode gebruik je als elimineren niet lukt zoals bijvoorbeeld bij

$$2x + 3y = 5 \wedge x^2 + y^2 = 13$$

Uit  $2x + 3y = 5$  volgt  $2x = -3y + 5 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}$  zodat

uit  $x^2 + y^2 = 13$  volgt  $(-\frac{3}{2}y + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 13$

$$\frac{9}{4}y^2 - \frac{15}{2}y + \frac{25}{4} + y^2 = 13 \Rightarrow \frac{13}{4}y^2 - \frac{15}{2}y - \frac{27}{4} = 0.$$

$13y^2 - 30y - 27 = 0$ . Met de abc-formule:

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 13 \cdot -27 = 2304 \Rightarrow y = \frac{30 \pm 48}{26} = 3 \vee y = \frac{30 - 48}{26} = -\frac{9}{13} \text{ dus uit}$$

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2} = -2 \vee x = -\frac{3}{2} \cdot -\frac{9}{13} + \frac{5}{2} = \frac{46}{13}$$

$$(x,y) = (-2, 3) \vee (x,y) = (\frac{46}{13}, -\frac{9}{13}).$$

**3. Vlakke figuren**

• **Oppervlakte berekenen**

$O_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2}bh$     
  $O_{\text{parallelogram}} = bh$     
  $O_{\text{trapezium}} = \frac{1}{2}(a+b)h$     
  $O_{\text{cirkel}} = \pi r^2$

Uit *gelijkvormigheid van driehoeken* kan je vaak *lengten* berekenen.  
 In deze figuur is  $\Delta ABC \sim \Delta DEC$  waaruit dan de 'evenredigheid' volgt  $AB:DE = BC:EC = AC:DC$ .