Wiskunde A, B, C en D voor het vwo
kort samengevat

Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening
vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen
dynamische modellen-logica-perspectief-
Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen

Over deze uitgave.

Deze uitgave is een herziene versie van *'Wiskunde A,B, C en D voor het vwo kort samengevat'*, waarin tevens enkele errata van de vorige uitgave zijn verwerkt.
Het geeft een korte samenvatting van de hoofdonderwerpen van wiskunde *A,B,C* en *D* van het vwo en is bedoeld voor een ieder die zich wil voorbereiden op het vwo-examen, een academische studie of op een andere vervolgopleiding.
De onderwerpen worden *niet alfabetisch* behandeld, maar in *afgeronde hoofdstukken.* Hiermee wordt voorkomen dat u noodzakelijke uitleg, definities,wetten en eigenschappen zou missen, die wellicht nodig kunnen zijn om aansluitende onderwerpen zonder extra moeite te kunnen doorwerken. Zo kunt u direct een door u gewenst hoofdstuk kiezen en daarbij dan zo nodig, specifieke begrippen opzoeken in het uitgebreide trefwoordenregister.

Hoofdstukindeling:

Het aantal voorbeeldopgaven en toepassingen is zeer beperkt gehouden. Om evenwel voldoende praktische ervaring op te doen in het toepassen van de stof worden alle wetten, eigenschappen en regels uitgebreid bewezen.
Aan het gebruik van de grafische rekenmachine is in de betreffende onderdelen alle nodige aandacht besteed. De commando's worden stap voor stap beschreven voor de TI-83 (≡ TI 84) van Texas Instruments, maar ook de Casio voldoet zeer goed.
Ik hoop met deze uitgave aan uw verwachtingen te mogen voldoen.

Over de auteur

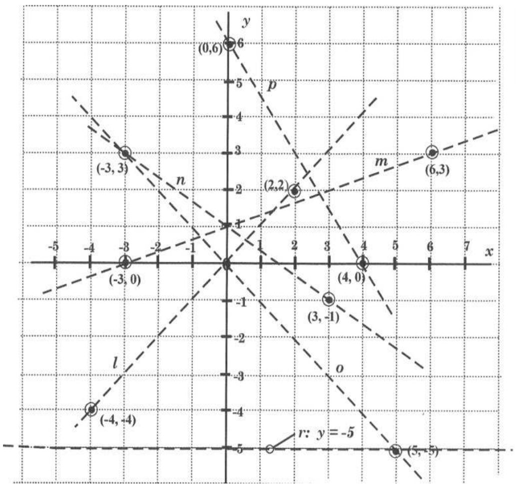
Wim Gronloh begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde (sinds 1978 ook informatica).
Schreef in 1998 de wiskunde methode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en havo/vwo en publiceert sinds 2009 wiskundeboeken voor het vwo. Eind 2019 is de herziene druk uitgegeven van 'Wiskunde van A tot D voor het vwo, helder en exact'.

Wim Gronloh
wimgronloh@kpnplanet.nl

1. *Functies*

Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f, (g, h, i, …) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f, precies één element f(x) = y uit het bereik B_f bepaalt

Lineaire functies



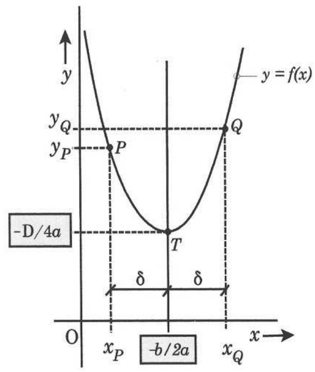
Een *lineaire functie* of *eerstegraads functie* is een (rechte) lijn l met vergelijking $y = ax + b$ waarin de *richtingscoëfficiënt is van l* en b *de y-coördinaat* van het snijpunt van l met de *y-as*.
In de figuur zijn de lijnen *l, m, n, o en p* getekend door twee gegeven punten in een *orthonormaal coördinatenstelsel XOY*. Vb: ***m* door (- 3,0) en (6,3*)***.
y = $ax + b$ met $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = = \frac{0-3}{-3-6} = \frac{-3}{-9}$ = dus y = $\frac{1}{3}$. x + b
Zo is in **(-3,0):** 0 = $\frac{1}{3}$. −3 + b ⇒ ***b*** = 1 ⇒ De vergelijking: is dus ***m*: *y* =** $\boldsymbol{\frac{1}{3}\,x + 1}$. Zo verder :
n door (−3,3) en (3,−1) ***n*: y =** $\boldsymbol{-\frac{2}{3}x + 1}$; o door (−3,3) en (5,−5) ***o*: y =** $\boldsymbol{-x}$; p door (0,6) en (4,0) ***p*: y=** $\boldsymbol{-\frac{3}{2}x + 6}$;
l door (−4, 4) en (2,2): ***l*: y=** $\boldsymbol{-x}$

Kwadratische functies

Een tweedegraads- ofwel kwadratische functie is een functie van de vorm
f(x) = $ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Door ***kwadraatafsplitsing*** is de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ te schrijven
als: $\boldsymbol{f(x)} = a\,(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{4a^2}}) - \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{4a}} + \mathrm{c} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a})$

$\boldsymbol{= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}$ waarin **D is *discriminant* = $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$.**



Wortels volgen uit $f(x) = 0$ *dus uit* $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0 \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$

$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (*'abc-formule'*) (blz.17)
De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een *parabool* met verticale as $x = \frac{-b}{2a}$ *en* punt $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ als ***top*** (*maximum of minimum*)
Als $a > 0$ dan is T een minimum ('dalparabool'), als $a < 0$ dan is T een maximum ('bergparabool').

Machtsfuncties

Een n[de] *graads machtsfunctie is van de vorm* $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^1 + a_nx^n$ ($a_n \neq 0$)

Rekenregels voor machten

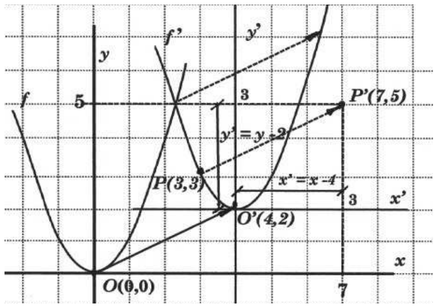
$$a^p \,.\, a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{p.q} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \qquad a^0 = 1$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (a.b)^p = a^p.\, b^p \qquad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Translatietransformaties

Bij de translatie T(a,b) wordt elk punt P(x,y) over a eenheden verschoven in de x-richting en b eenheden in de y-richting.
Het T-beeld van een functie f(x) is daarbij de functie f``(x) = f (x – a) + b

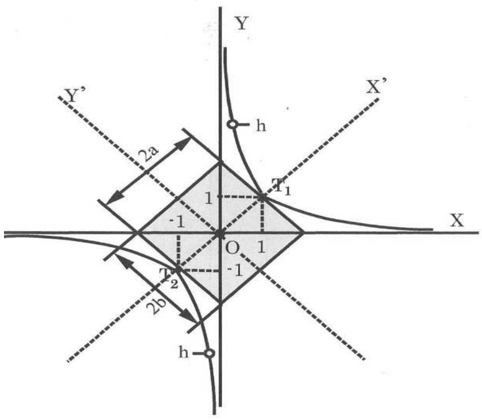
Voor de coördinaten (x', y') van het beeldpunt P' van P (x, y) geldt na de translatie T(a,b): $\boldsymbol{x' = x - a}$, $\boldsymbol{y' = y - b}$
Voor het beeld $f\,'(x)$ van een functie $f\,(x)$ geldt dan y = $f\,(x - a) + b$.
In deze figuur is de assentransformatie *T*(4,2*) toegepast op de (dal)parabool* $\boldsymbol{f\!: y = x^2}$ die daarbij overgaat in de daarmee congruente parabool: $\boldsymbol{f'\!: y = (x-4)^2 + 2.}$



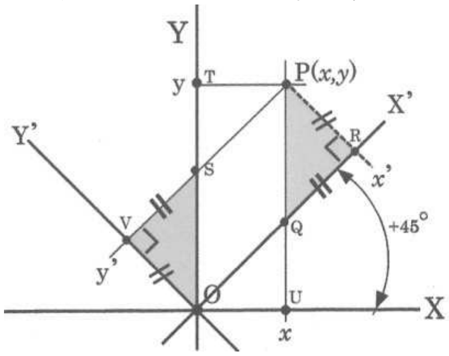
Rotatietransformaties

Bij een rotatie R(α) wordt elk punt P(x,y) over een hoek α om de oorsprong O van het assenstelsel XOY geroteerd, in wijzerzin als α ***< 0*** *in tegenwijzerzin* ***als*** *α* ***> 0***

Door *rotatie om O over* α= +45° (in tegenwijzerrichting) ontstaat in de figuur rechts het tweede coördinatenstelsel *X' O Y '*.
Ten opzichte van dit stelsel ligt de as van de orthogonale hyperbool *h* langs de X'-as en *het middelpunt in de oorsprong O' = O* dus geldt de *middelpuntsvergelijking: h:* $\boldsymbol{\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1}$ *van de hyperbool.* Omdat $|T_1\,T_2| = 2\,a = 2\sqrt{2}$ dus ook $2\,b = 2\sqrt{2}$ geldt dan $a = b = \sqrt{2}$ dus $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{(x')^2 - (y')^2 = 2}$ …(1)



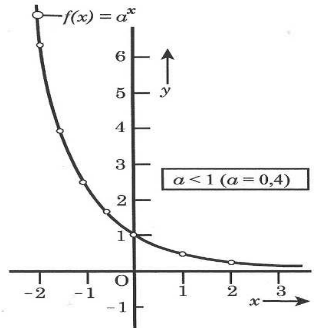
In de figuur hieronder is het gevolg van de rotatie over +45° afgebeeld. Hieruit blijkt: $OR = \boldsymbol{x'} = OQ + QR = \boldsymbol{x\sqrt{2} + y'}$
(want Δ*OSV* en Δ*PQR* zijn rechthoekig en gelijkbenig).



Verder is*:* $\boldsymbol{y} = OT = OS + ST$ met $OS = y'\sqrt{2}$ en $ST = PT = x$ zodat $OS + ST = y = y'\sqrt{2} + x \Rightarrow \boldsymbol{y' = \frac{y - x}{\sqrt{2}}}$ **…**(2)
Deze waarde voor y' in (1) gesubstitueerd geeft
$x' = x\sqrt{2} + \frac{y-x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boldsymbol{x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}}$ …(3)
Substitutie van (2) en (3) in (1) geeft: $(x')^2 - (y')^2 = 2$
$\Rightarrow (\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{y-x}{\sqrt{2}})^2 = 2 \Rightarrow \frac{4\,xy}{2} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{x}.}$
De vergelijking van de orthogonale parabool *h* is dus
h: $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) en is het rotatiebeeld over +45° van de daarmee *congruente orthogonale* hyperbool met middelpuntsvergelijking
$\frac{(x)^2}{2} - \frac{(y)^2}{2} = 1$ met de x'-as als as.

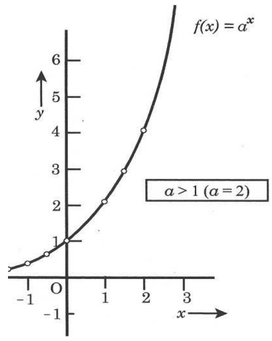
Exponentiële functies

Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$)



Voorbeelden:

De grafieken van a^xvoor a < 1 en a > 1 gaan beide door (0,1) want voor elke a is a^0= 1.
Als a < 1 dan is a^x dalend want $a^{x+1} = a.a^x < a^x$
Als a > 1 dan is a^x stijgend want $a^{x+1} = a.a^x > a^x$
Van beide grafieken is de x-as de horizontale asymptoot, want als a < 1 dan is $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$,
als a >1 dan is ook $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.



Exponentiële groei

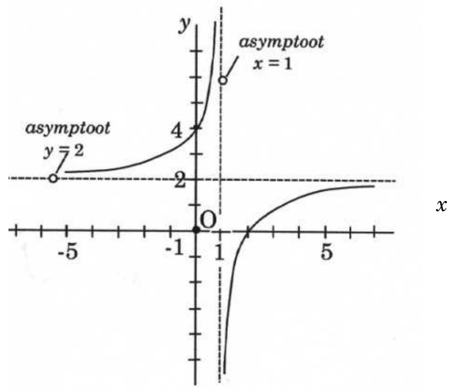
> *Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is, is na t perioden: N(t) = N(0) . g^t (N(0) = startwaarde)*

Dus: Als een zekere hoeveelheid *elk kwartier* toeneemt met 12%, dan is
- de groei*factor* per kwartier 1,12 × de startwaarde (= 1) = 1,12 × 1 = **1,12**.
- de groeifactor en het groei*percentage* per uur is dan $1{,}12^4$ = **1, 574**;
  het *groeipercentage* is **57,4**
- de groeifactor in vijf minuten is $1{,}12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}12}$ = 1,0385
  het groeipercentage per *vijf minuten* is dan ≈ **3,85%**

Gebroken rationale functies

> *Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm f (x) =* $\frac{g(x)}{h(x)}$
> *waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtsfuncties zijn met reële coëfficiënte*

Hier is de grafiek getekend van de *gebroken rationale functie* $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$. De functie is *niet gedefinieerd* in het punt met x = 1 omdat voor die waarde de noemer gelijk is aan nul ...(1)
Uit $\boldsymbol{x = 0}$ volgt dat $\boldsymbol{y = 4}$ en uit $\boldsymbol{y = 0}$ volgt $\boldsymbol{x = 2}$ dus snijdt de grafiek de x-as in het punt (2,0) en de y-as in (0,4).
De grafiek bestaat uit de twee takken van *een **hyperbool***.
Bij toenemende waarden van x ($x\to\pm\infty$) naderen rechter- en linkertak tot de lijn y = 2, bij toenemende y ($y\to\pm\infty$) naderen beide takken tot de lijn x = 1. De functie heeft dus een ***horizontale asymptoot y* = 2** en een ***verticale asymptoot x* = 1**
De functie is ***discontinu i***n het punt met x = 1 volgens (1).



Logaritme van een getal

> *De ^{g} logaritme van een getal a is gedefinieerd als:* $\boldsymbol{{}^g\log a = x}$ ***als*** $\boldsymbol{g^x = a}$ (a en g > 0 en $g \neq 1$)

Het ***grondtal g*** is een willekeurig positief reëel getal ≠ 1.

Zo is: $\boldsymbol{{}^2\log 8 = 3}$, omdat $\boldsymbol{2^3 = 8}$; $\boldsymbol{{}^5\log 125 = 3}$ **want** $\boldsymbol{5^3 = 125}$; $\boldsymbol{{}^{1/3}\log {}^1/_9 = 2}$ omdat $\boldsymbol{{}^1/_3{}^2 = {}^1/_9}$.
Log *x* is de ***Briggse logaritme*** van x met 10 *als grondtal*, dus $\boldsymbol{\log x = {}^{10}\log x}$,
Zo is log 10 = 1, want $10^1 = 10$; log 1000= 3 want $10^3 = 1000$; log 0,01 = −2 want $10^{-2} = 0{,}01$.

John Napier voerde voor *het grondtal* ***g*** het getal ***e*** in, het '***Getal van Euler***'.
Logaritmen met dit grondtal noemt men *Neperiaanse*- of *natuurlijke logaritmen* met notatie ***ln x*** ⇒ ***ln x =*** ^{e} ***log x.*** Dus:

> *Als* $\log x = p$, *dan is* $10^{p} = x$, *als* $\ln x = q$ *dan is* $e^{q} = x$, *als* $^{g}\log x = r$ *dan is* $g^{r} = x$,

Eigenschappen van logaritmen

1 - $^{g}\log ab \ = \ ^{g}\log a + {}^{g}\log b$
2 - $^{g}\log \frac{a}{b} \ = \ ^{g}\log a - {}^{g}\log b$
3 - $^{g}\log(a^{n}) \ = \ n.\,^{g}\log a$
4 - $^{g}\log(g^{x}) = x$; $g^{\,^{g}\log x} = x$
5 - $^{1/g}\log x \ = \ -\,^{g}\log x$
6 -: $^{g}\log x \ = \ \dfrac{\log x}{\log g}$

Te bewijzen door $^{g}\log a = p$ te stellen en $^{g}\log b = q$.

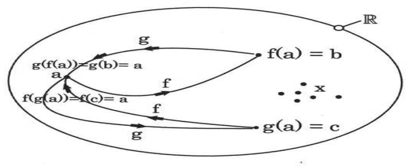
Toepassing: Los x op uit
$\log(x^{2} + 1) = 1 + 2 \log x$
$= \log 10 + \log(x^{2})$
$= \log () \Rightarrow x^{2} + 1 = 10\,x^{2}$ dus
$9\,x^{2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ of $\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$ voldoet niet (in log x is $x > 0$)

Waarden van logaritmen ($g \neq 10$ of e) bereken je met de GR via de eigenschap: $^{g}\boldsymbol{\log x = \dfrac{\log x}{\log g}}$

Inverse functies

> *Zijn f en g twee functies in* $\mathbb{R}$ *waarbij voor elk element x geldt dat* $f(g(x)) = g(f(x)) = x$
> *dan zijn f en g elkaars inverse functies*

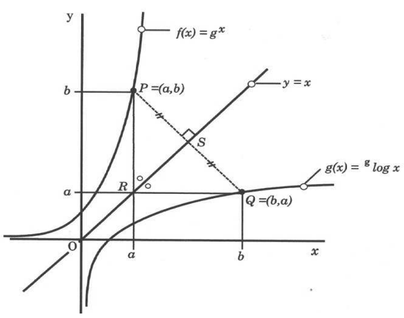
Machtsverheffen $f(x) = x^{p}$ en worteltrekken $g(x) = \sqrt[p]{x}$ zijn elkaars inversen, want voor elk getal x is:
$f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^{p} = x$ en $g(f(x)) = g(x^{p}) = \sqrt[p]{x^{p}} = x.$
Gemakkelijker te onthouden:
Zijn f en f^{-1} elkaars inverse functies dan als $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$.



> *De logaritmische functie* $f(x) = {}^{g}\log x$ *en de exponentiële functie* $h(x) = g^{x}$
> *zijn elkaars inverse functies*

Als $f(x) = {}^{g}\log x$ *en* $h(x) = g^{x}$ *dan is* $f(h(x)) = {}^{g}\log(g^{x}) = x$ *en* $h(f(x)) = g^{\,^{g}\log x} = x$ (eig. 4).

> *Als f en g elkaars inverse functies zijn, dan zijn de grafieken*
> *van f en g elkaars spiegelbeeld in de lijn* $y = x$.

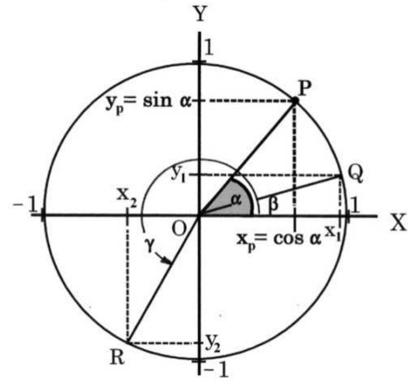


Omdat P(a) = b *op* $f(x)$ en Q(b) = a *op* $g(x)$,zijn Pen Q punten van twee inverse functies $f(x)$ en g^{x}.
(In de figuur zijn als voorbeeld de inverse functies $f(x) = g^{x}$ *en* $h(x) = {}^{g}\log x$ gekozen*)*. Uit de figuur blijkt dat de $\Delta\Delta$ *PSR en QSR* rechthoekig en gelijkbenig zijn en congruent omdat *PQ = PR, met gevolg: P en Q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x.*
Dit betekent dat *ook de raaklijnen in een punt P en zijn inverse punt Q* elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn y =x dus dat de ***afgeleiden*** $f\,'(P)$ en g'(Q) *elkaars spiegelbeeld zijn in y = x.*
Hieruit is direct af te leiden *dat voor de inverse functie f en g algemeen geldt:* $\boldsymbol{f\,'(x) = 1/\,g'(x)}$.

Goniometrische functies

In de planimetrie worden *sinus, cosinus* en *tangens* van ***hoeken*** **< 90°** gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige driehoek.* Per definitie is dan:
sinus α =(sin α) = $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}}$, ***cosinus*** α =(cos α) = $\dfrac{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}}$

> *De cosinus en sinus van een hoek α zijn gedefinieerd in de eenheidscirkel als respectievelijk de x- coördinaat en y-coördinaat van het eindpunt P van de voerstraal OP van α* ($\alpha \in \mathbb{R}$).



Om sinus en cosinus te definiëren voor een ***willekeurige hoek*** **$\alpha + k.\ 360°$** (**$k \in \mathbb{Z}$**) is de '***eenheidscirkel***' ingevoerd, een cirkel met *straal* $R = 1$ en middelpunt O in de oorsprong van het XOY stelsel. Elke hoek α wordt daarin voorgesteld door de hoek XOP die het '*vaste been*' OX maakt met de '*voerstraal*' OP van $\angle XOP$.
Zo is dan $\alpha = 0$ als voerstraal *OP samenvalt met OX.* Als $\alpha > 0$ dan wordt OP vanuit OX om O over de hoek α geroteerd in *tegenwijzerzin,* als $\alpha < 0$, dan wordt OP om *O over de hoek* α geroteerd *in wijzerzin.*
Voor de coördinaten van het eindpunt $P(x_p, y_p)$ van de voerstraal OP geldt dan: **cos** $\alpha = \left(\frac{x_p}{OP} = \frac{x_p}{1}\right) = \boldsymbol{x_p}$ en **sin** $\alpha = \left(\frac{y_p}{OP} = \frac{y_p}{1}\right) = \boldsymbol{y_p}$
Het domein van sin α en cos α = $k.\ 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; het bereik is $[-1, 1]$.

De ***tangens*** van hoek α wordt in een rechthoekige driehoek gedefinieerd als de verhouding $\frac{overstaande\ rechthoekszijde}{aanliggende\ rechthoekszijde}$ van α. Zo is in de eenheidscirkel: $\tan\alpha = \frac{y_p}{x_p}$ ($x_p \neq 0$).Voor *elke reële hoek* α geldt dan: **tan** $\alpha = \boldsymbol{\frac{y_p}{x_p} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ ($\alpha \neq$ **90° + *k.* 180°**). Het bereik van tan α = ℝ.

De radiaal

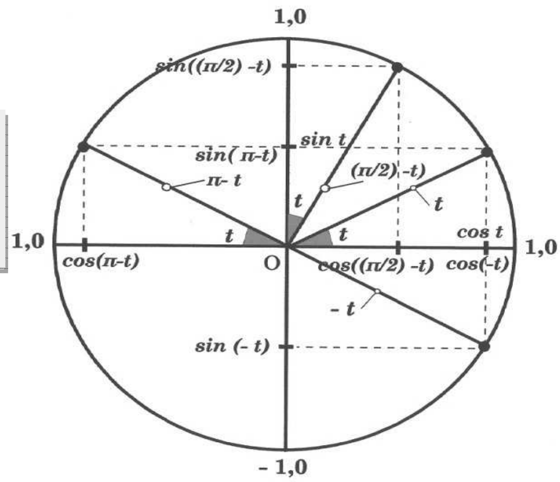
> *Een hoek van één radiaal is de grootte van de middelpuntshoek in een cirkel, die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel*

De radiaal is de *standaardeenheid van hoekgrootte*; zijn ***dimensie* = 1** want als $\alpha = \varphi$ radialen, dan is $\alpha = \frac{\varphi.\ r\ [m]}{r\ [m]} = \varphi.\ 1$ als r de straal is van de cirkel. De grootte van een radiaal is dus *een onbenoemd getal.*
De omtrek P van een cirkel met staal r is $P = 2\pi.r$, zodat $360° = \frac{2\pi.r}{r} = 2.\pi$ (radialen), dus $360° = 2.\pi \Rightarrow$ **π = 180°.** Andere te onthouden, exacte omzettingen:

hoek φ in radialen	2 π	3 π/2	π	π/2	1	π / 180
hoek φ in graden	360 °	270 °	180 °	90 °	180 / π °	1°

Goniometrische herleidingformules

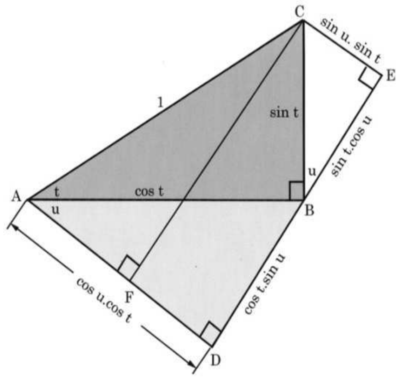
> $\sin(-t) = -\sin t\ ;\quad \cos(-t) = \cos t$
> $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t\ ;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$
> $\sin(\pi - t) = \sin t\ ;\quad \cos(\pi - t) = -\cos t$



In de getekende hoeken in de eenheidscirkel hiernaast zijn deze regels gemakkelijk af te lezen.

Sinus en cosinus van som en verschil

> 1. $\sin(t + u) = \sin t\ .\ \cos u + \cos t\ .\ \sin u$
> 2. $\cos(t + u) = \cos t\ .\ \cos u - \sin t\ .\ \sin u$
> 3. $\sin(t - u) = \sin t\ .\ \cos u - \cos t\ .\ \sin u$
> 4. $\cos(t - u) = \cos t\ .\ \cos u + \sin t\ .\ \sin u$
> 5. $\tan(t + u) = \frac{\tan t + \tan u}{\tan\ t\ .\ \tan u}$



Bewijzen: Uit de figuur zijn de ***eigenschappen* 1 *en* 2** af te leiden: In de rechthoekige $\Delta\Delta$ *ABC* en *ADB is* $\angle$ *BAC* = *t*, $\angle$ *BAD*= *u*. *Z*ijde *DB* is verlengd met *BE* waarna de rechthoekige driehoek *BEC* ontstaat. Omdat in Δ *ADB*: $\angle ABD = 90° - u$, geldt in Δ *BEC* dat $\angle CBE = 180° - (90° - u) - 90° = u$ .In Δ *BEC* is *BE* = *BC*. *cos u* en omdat **AC = 1** in Δ *ABC* is *BC* = 1. sin *t* dus ***BE = sin t. cos u*** …(1)
In Δ *ADB is BD* = *AB*. sin *u* en in Δ *ABC* = *AB* = 1.cos *t* zodat ***BD = cos t. sin u.*** …(2)
CF $\perp$ *AD* , dus *CF* // *ED dus CF* = *DE*.

In Δ *AFC* is $\angle$ *CAF* = (*t* + *u*) dus *sin* $\angle$ *CAF* = *CF*/1
DE $\Rightarrow$ ***sin* (*t + u*) = = *sin t . cos u + cos t. sin u*** (eigenschap 1).
Uit cos $\angle$ *CAF* = cos(*t* + *u*) = *AF*/*AC* = AF/1 = *AF* = *AD*−*DF* = = *AD* −*CE* $\Rightarrow$
cos(*t + u*) = cos *u*. cos *t* – sin *u*. sin *t*. (eigenschap 2).
De eigenschappen **3 en 4** zijn direct uit de eerste twee af te leiden door sin (*t*−*u*) te schrijven als sin (*t* + (−*u*)) en cos(*t*− *u*) als cos (*t* + (−*u*)) waarbij sin (−*u*) = −sin *u* en cos (−*u*) = cos *u*.
Eigenschap **5** ontstaat door de substitutie: tan $t = \frac{\sin t}{\cos t}$ en tan $u = \frac{\sin u}{\cos u}$.

Verdubbelings en halveringsformules

sin (2t) = 2 sin t . cos t	*cos (2t) = 1 – 2 sin² t*
sin t = 2 sin (½ t). cos (½ t)	*cos t = 1 – 2 sin² (½ t)*

Door 2*t te vervangen door* (*t* + *t) en t door (½ t +* (*½ t) volgen deze formules direct uit de formules:sin* (*t* + *u*) = *sin t . cos u + cos t . sin u en cos* (*t* + *u*) = *cos t . cos u – sin t . sin u.*
Zo ook sin *t* = sin ($\frac{1}{2}$ *t* +$\frac{1}{2}$ *t*).***Vb***: *sin* (2*t*) **=** *sin* (*t* + *t*) = *sin t . cos t + cos t . sin t* = **2 *sin t . cos t***

Formules van Simpson

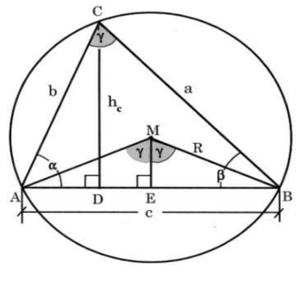
1. *sin t + sin u* = 2 *sin* $\frac{1}{2}$ (*t + u*) . *cos* $\frac{1}{2}$ (*t – u*)
2. *sin t* – *sin u* = 2 *sin* $\frac{1}{2}$ (*t – u*) . *cos* $\frac{1}{2}$ (*t + u*)
3. *cos t + cos u* = 2 *cos* $\frac{1}{2}$ (*t + u*) . *cos* $\frac{1}{2}$ (*t – u*)
4. *cos t – cos u* = –2 *sin* $\frac{1}{2}$ (*t – u*) . *sin* $\frac{1}{2}$ (*t + u*)

Bewijzen: 1: Noem $t = \frac{1}{2}(a + b)$ en $u = \frac{1}{2}(a - b)$ dan is
sin *t* + sin *u* = sin $\frac{1}{2}$ (*a* + *b*) + sin $\frac{1}{2}$ (*a* – *b*)
= (sin $\frac{1}{2}$ *a*. cos $\frac{1}{2}$ *b* + cos $\frac{1}{2}$ *a*. sin $\frac{1}{2}$ *b*) + (sin $\frac{1}{2}$ *a*. cos (–$\frac{1}{2}$ *b*) – cos $\frac{1}{2}$ *a*. sin (–$\frac{1}{2}$*b*)
= 2 sin $\frac{1}{2}$ *a*. cos $\frac{1}{2}$ *b* want cos (–$\frac{1}{2}$ *b*) = cos $\frac{1}{2}$ *b* …(1)
Uit $t = \frac{1}{2}(a + b)$ en $u = \frac{1}{2}(a - b)$ volgt: ***t + u = a*** en ***t* − *u = b***,
zodat $\frac{1}{2}$ ***a* =** $\frac{1}{2}$ **(*t + u*)** en $\frac{1}{2}$ ***b*** = $\frac{1}{2}$ **(*t – u*)** . ..(2)
(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan: ***sin t + sin u* = 2 *sin*** $\frac{1}{2}$ **(*t + u*) . *cos*** $\frac{1}{2}$ **(*t - u*)**
Met eigenschap 1 kan je nu de eigenschappen 2 t/m 4 afleiden door resp. te schrijven:
sin t − *sin u* = *sin t* + *sin* (*– u*); *cos t + cos u = sin* ($\frac{\pi}{2}$ *– t*) + *sin* ($\frac{\pi}{2}$ *– u*) en
cos t – cos u = sin ($\frac{\pi}{2}$ *– t*) − *sin* ($\frac{\pi}{2}$ *– u*).

Sinusregel

In elke Δ *ABC geldt*: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ **=** 2*r* (*r = straal omgeschreven cirkel*)

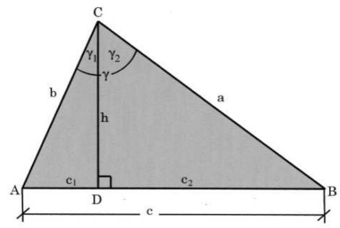
Getekend is $\Delta\, ABC$ met zijn omgeschreven cirkel (M,r) en de hoogtelijn h_c op zijde c.
De oppervlakte van $\Delta\, ABC$ is: $O_{\Delta ABC} = ½\, h_c.\, c = ½.(b \sin \alpha).\, c = ½\, bc.\sin \alpha$.
Zo is ook $O_{\Delta ABC} = ½\, ac.\sin \beta$ en $O_{\Delta ABC} = ½\, ab.\sin \gamma$ met gevolg:
$O_{\Delta ABC} = ½\, b.c.\sin \alpha = ½\, a.c.\sin \beta = ½\, a.b.\sin \gamma$, dus
$b.c.\sin \alpha = a.c.\sin \beta = a.b.\sin \gamma \Rightarrow \dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$ ...(1)



Omdat *ME* de *middelloodlijn* is van *AB* (omgeschreven cirkel = *M,r*)
zijn de Δ Δ *AMB* en *BME* congruent zodat $\angle AME = BME$.
Omtrekshoek $\angle ACB = ½ \times$ de cirkelboog die hij onderspant dus
$E = ½ \times$ bg AB met gevolg $\angle AMB = 2 \times \angle ACB$ *en* omdat $\angle\, ACB = \gamma$ is dus
$\angle AMB = 2\gamma$ .Omdat volgens (2) $\angle AME = \angle BME$ en $\angle AME + \angle BME = \angle AMB = 2\gamma$ is
$\angle AME = \angle BME = \gamma \Rightarrow \sin \angle AME = \sin \gamma = \dfrac{AE}{AM} = \dfrac{1/2\, c}{r} \Rightarrow \dfrac{c}{\sin \gamma} = \mathbf{2r}$ ...(2)
Uit (1) en (2) volgt dan: $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$ **= 2 *r*, *de sinusregel.***

Cosinusregel

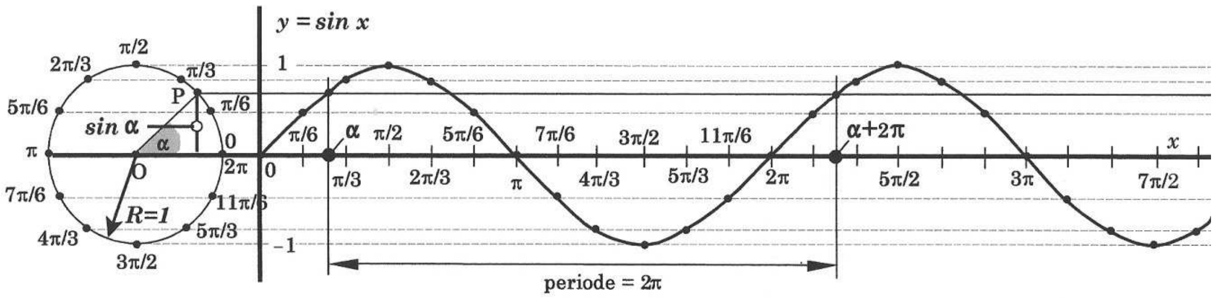
> *Zijn a,b en c de zijden van een Δ ABC en is γ de hoek tegenover zijde c,*
> *dan geldt:* $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab.\cos \gamma$



In de figuur is in driehoek *ABC* de hoogtelijn *h* op zijde *AB* = *c* getekend.
Er geldt:
$AB = c = c_1 + c_2$ dus $c^2 = (c_1 + c_2)^2 = c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + 2\, c_1.\, c_2$
$= (b^2 - h^2) + (a^2 - h^2) + 2\, c_1.\, c_2$
dus: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,(h^2 - c_1.c_2)}$ ...(1)
$\angle\, C = \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ zodat $\cos \gamma = \cos(\gamma_1 + \gamma_2) = \cos \gamma_1 . \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 . \sin \gamma_2$
$= \dfrac{h}{b} . \dfrac{h}{a} - \dfrac{c_1}{b} . \dfrac{c_2}{a} = \dfrac{h^2 - c_1 c_2}{ab}$ dus $\cos \gamma = \dfrac{h^2 - c_1 c_2}{ab} \Rightarrow \mathbf{h^2 - c_1.c_2 = ab\cos \gamma}$
en dit in (1) gesubstitueerd geeft dan: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab.\cos \gamma}$.

Sinusfunctie

De sinus van een hoek *x* is gedefinieerd voor alle reële getallen *x* als de ***y*-coördinaat** van het eindpunt *P* van de *voerstraal OP* van hoek φ in de *eenheidscirkel.*
In onderstaande figuur is de grafiek van *y = sin* φ geconstrueerd door de waarden van sin φ in de getekende eenheidscirkel over te brengen naar de bijbehorende punten op de *x*-as.



De daarbij ontstane kromme heet ***sinuslijn.***
Omdat ***een hoek*** φ van α radialen = de waarde α *op de x-as*, is hiermee de grafiek van
y = sin φ geconstrueerd vanuit een cirkel met straal ***r*** = 1.
Als de voerstraal *OP één volledige cirkel heeft doorlopen*, dus als *x* = 2π, dan *vallen* bij een tweede omloop van *OP* de omtrekspunten van *P* behorende bij de hoeken
$2\pi + \frac{\pi}{6}$, $2\pi + \frac{\pi}{3}$, $2\pi + \frac{\pi}{2}$, … , 4π *samen* met de punten waarvoor $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \ldots, 2\pi$.

Vanaf $x = 2\,\pi$ vertoont de grafiek van sin x tot sin $(x + 2\,\pi)$ hetzelfde beeld als op het interval $[0, 2\,\pi]$. In de figuur zie je als voorbeeld dat sin α = sin $(\alpha + 2\pi)$).
Bij elke volgende volledige omloop van *OP* gedraagt de grafiek van sin x zich als op het interval $[0, 2\pi]$, ook als *OP* vanuit de nulstand *in tegenwijzerzin* de eenheidscirkel doorloopt, want **sin x = sin ($x \pm k.2\pi$)** met $k \in \mathbb{Z}$.
Omdat dus algemeen sin x = sin $(x + p)$ waarin p een *constante* voorstelt, (hier: $p = 2\pi$) is $f(x)$ = *sin x een* ***periodieke functie.*** De waarde p heet de ***periode*** van die functie.

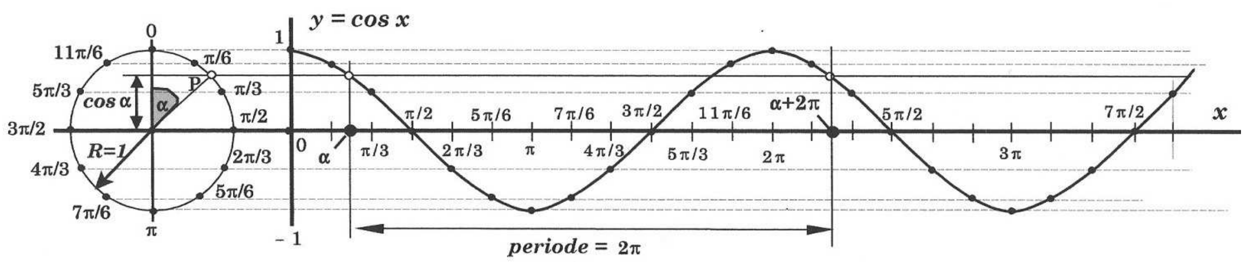
De functie $y = f(x)$ = sin x is een periodieke functie met periode $p = 2\pi$ $(x \in \mathbb{R})$

De *functie* ***sin x = p*** is ***geen*** '1-1 *afbeelding'*, d.w.z. dat *niet bij elk beeld* één en slechts één origineel behoort. Zo is bijvoorbeeld sin π / 6 = sin 30° = 0,5 maar als sin x = 0,5 dan is x = 30° of x = (180° − 30°) = 150°, of x = 30° + 360°…of algemeen
***x* = 30° + *k.* 360° of *x* = 150 ° + *k.* 360°** ($k \in \mathbb{Z}$**)**
Er is daarom een functie y = ***arcsin (x) = $\sin^{-1}$(x)*** gedefinieerd waarvan *het bereik beperkt is* tot het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en het *domein* = het *bereik* [−1, 1] van *sinus x.*

Als arcsin (x) = $\sin^{-1}(x) = y$, dan is $y = x$ waarin $x \in [-1, 1]$ en $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Cosinusfunctie

De *cosinus* van een hoek x is voor reële getallen x gedefinieerd als de ***x-coördinaat*** van het eindpunt *P* van de voerstraal *OP* van hoek x in de eenheidscirkel.
Hieronder is de grafiek van y = *cos x* geconstrueerd zoals die van y = sin x, nu door de eenheidscirkel *een kwart slag in tegenwijzerzin om O te draaien ,* waardoor de projecties van *P* op de x-as, dus de waarden van cosinus x, in de y- richting komen te liggen.



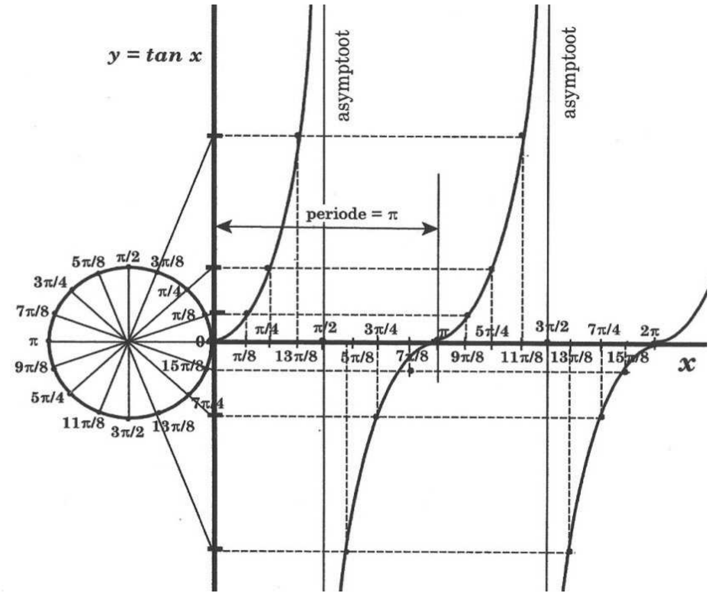
Er geldt: **cos x = cos ($x \pm 2\pi$)** dus als de voerstraal *OP één volledige cirkel heeft doorlopen*, vallen bij een tweede omloop de punten *P* behorend bij de hoeken $2\pi + \frac{\pi}{6}$, $2\pi + \frac{\pi}{3}$, π,…, 4π weer samen met die van $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \ldots , 2\pi$. Op het interval $[2\pi, 4\pi]$ is dus het verloop van de grafiek gelijk aan dat op $[0, 2\pi]$. Als voorbeeld is afgebeeld dat **cos α = cos (α + 2π).**
Ook bij volgende omlopen van *OP* zal de grafiek van cos x zich weer gedragen als op het interval $[0, 2\pi]$, ook als *OP* in tegenwijzerzin een volledige eenheidscirkel doorloopt.
Omdat hierbij voor ieder x geldt cos x = cos $(x + p)$ met $p = k.2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) is ook y = cos x een *periodieke functie met periode* = 2π.

De functie $y = f(x)$ = cos x is een periodieke functie, met periode $p = 2\,\pi$

Bij elke waarde van x is de bijbehorende waarde van cos x te bepalen, maar omgekeerd wordt aan de functie y = cos x bij gekozen *y geen eenduidige waarde* van x bepaald.
Immers: cos π / 3 = cos 60° = 0,5, maar als cos x = 0,5 dan is x = π / 3 of x = − π / 3 *of* $x = \pm\,\pi / 3 + 2\,\pi$ *of* $x = \pm\,\pi / 3 + 4\,\pi$, …algemeen: x = ± 60° + k. 360°.
Daarom is een functie y = **arccos (*x*) = *$\cos^{-1}$* (*x*)** gedefinieerd waarvan het bereik beperkt *is* tot het interval [0, π] en het *domein* gelijk is aan het *bereik* [−1, 1] van co*sinus x.*

Als y = arccos (x) = $\cos^{-1}$ (x) = y dan is $y = x$ waarin $x \in [-1, 1]$ en $y \in [0, \pi]$

Tangensfunctie



De *tangens* van een hoek x wordt wel ***meetkundig gedefinieerd*** voor alle reële x ($x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$) als: De *lengte van het lijnstuk* dat de voerstraal van x in de *eenheidscirkel na verlenging afsnijdt van de raaklijn in* $x = 0$ *aan de eenheidscirkel.* Volgens deze definitie is de grafiek van $y = \tan x$ getekend.
De snijpunten van de verlengde voerstralen en *die raaklijn* behorende bij: $x = 0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ldots,\ 2\pi$ zijn geprojecteerd op verticale lijnen door de overeenkomstige deelpunten op de x-as. Als $x = \frac{\pi}{2}$ of $x = \frac{3\pi}{2}$ dan snijden de verlengde voerstralen de raaklijn niet.
Omdat. hierbij dan $\lim_{x\uparrow \pi/2} \tan x = +\infty$ en $\lim_{x\downarrow \pi/2} \tan x = -\infty$ heeft de grafiek op $[0,2\pi]$ een ***verticale asymptoot*** in $x = \frac{\pi}{2}$ en ook in $x = \frac{3\pi}{2}$, dus $\tan(\pi/2) = +\infty$ en $\tan(-\pi/2) = -\infty$ zodat $\tan x$ ***niet is gedefinieerd*** als $x = \pi/2 + k.\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Verder volgt uit de constructie dat voor iedere x op het interval $[0,2\pi]$ geldt:
tan x = *tan* $(x + \pi)$, want de voerstralen van deze hoeken *vallen samen, dus* snijden de raaklijn aan de eenheidscirkel in een zelfde punt. Bij elke draaiing van de voerstraal over $k.\pi$ radialen $k \in \mathbb{Z}$) is dan het verdere verloop van de grafiek gelijk aan de grafiek op $[0, \pi]$, dus:

De functie $y = \tan(x)$ is een periodieke functie met periode $p = \pi$

Omgekeerd wordt ook aan de functie $y = \tan x$ bij zeker waarde van y *geen eenduidige waarde* aan x toegekend. Bijvoorbeeld: als $y = \tan x = 1 \Rightarrow x = 45°$, *of* $x = 225°$, *of* $x = 405°$, *of* $x = \ldots$
Om een 1-1 *afbeelding* te verkrijgen is de inverse functie $\boldsymbol{y = \tan^{-1}(x) = \text{arctangens}\ x}$ gedefinieerd, waarvan *het bereik* beperkt is tot *het interval* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en het *domein* gelijk is aan *het bereik* $\langle -\infty, +\infty\rangle$ van *tangens x* .

Sinus en cosinus van 'standaardhoeken'

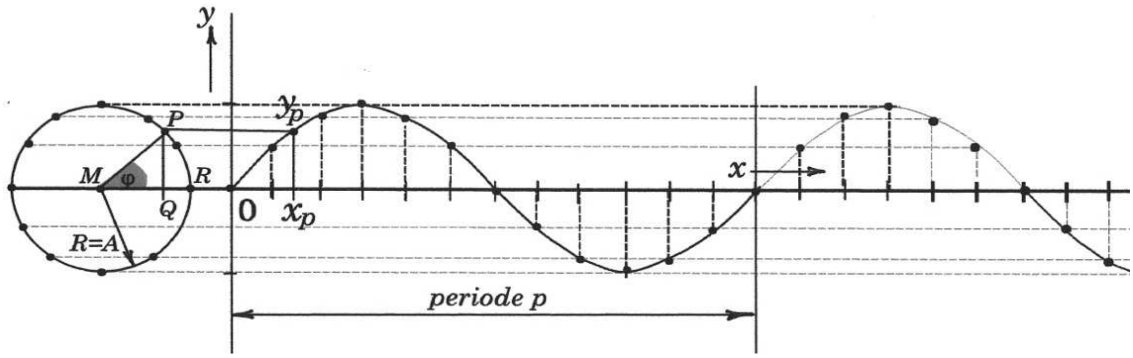
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

Sinusoïden

De grafiek van de periodieke functie $y = \sin x$ is geconstrueerd vanuit de eenheidscirkel, dus met straal r = 1 en met startpunt O (0,0). De kromme door de *uitwijkingen* u_P van een punt P op de omtrek van die cirkel leverde dan de grafiek van de functie met startpunt (0,0), periode = 2π en ***amplitude*** A (= maximale uitwijking u_P) = 1 . De zo ontstane (standaard-) ***sinuslijn*** is dan de grafiek van de periodieke functie $\boldsymbol{y = \sin x}$.

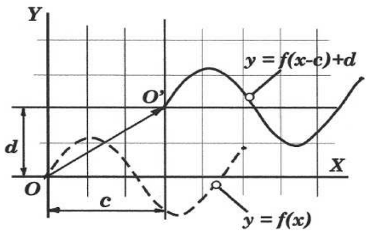
Voer je nu dezelfde constructie uit op een cirkel met middelpunt $M = (0,0)$ en *straal A* ***van willekeurige lengte,*** dan ontstaat een '*sinusachtige' periodieke functie* met amplitude A
De ontstane kromme heet ***sinusoïde*** en is van de vorm $y = A.\ sin\ (\frac{2\pi}{p}.\ x)$, want:

$\varphi : 2\pi = x : p \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{p}.\ x$. De sinusoïde is de grafiek van $y = A.$ sin φ *dus* $\mathbf{y = A.\ \mathit{sin}\ (\frac{2\pi}{p}.\ x)}$



Voor een sinusoïde met startpunt het punt O (0,0), *amplitude A*
en periode p geldt op $[\,0{,}2\pi]$ $y = A.\ sin\ (\varphi.\ x) = A.\ sin\ (\frac{2\pi}{p}.\ x)$

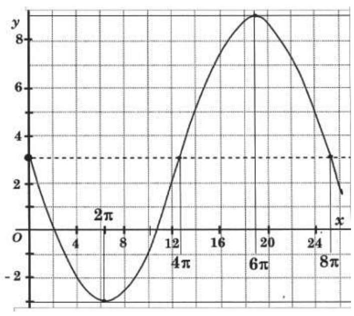
Tranformeer nu de formule tot die van een sinusoïde met *willekeurig start*punt O'= (c,d) en amplitude *A*.



Volgens de *translatietransformatieregel* gaat een functie $y = f\,(x)$ bij *translatie* over $T = \binom{c}{d}$ over in $y = f\,(x - \mathbf{c}) + \mathbf{d}$, dus gaat de formule $y = A.\ \ sin\ (\frac{2\pi}{p}.\ x)$ over in:
$\mathbf{y = A\ sin\ \{\frac{2\pi}{p}(x - c)\} + d}$ waarbij O' (**c, d**) het nieuwe startpunt is. De '***evenwichtsstand***' (de lijn door de nulpunten) is nu de lijn ***y = d.***

Voor een sinusoïde met startpunt O (*c,d*), *amplitude A en periode p geldt*
$y = A\ sin\ \{\frac{2\pi}{p}(x - c\,)\} + d$. *De evenwichtsstand is de lijn* $y = d$

Voorbeeld: Geef startpunt, amplitude, periode en evenwichtsstand van de sinusoïde $\mathbf{y = 3 - 6.\ sin\ (\frac{1}{4}\,x)}$



Schrijf $y = 3 - 6.$ sin $(1/4x) = -\,6.$sin $(1/4\ x) + 3$ in de vorm
$y = A\ sin\ \{\frac{2\pi}{p}(x - \mathbf{c})\} + \boldsymbol{d}$ als: $-\ \mathbf{6}.$ sin $\{1/4\ (x - \mathbf{0})\} + \mathbf{3}$ dus c = 0,
$A = -\ 6$, en $d = 3$, dus het *startpunt is* (0, 3); de *amplitude* $A = -\ \mathbf{6}$.
De *periode* $\boldsymbol{p} = 8\pi$ (omdat $\frac{2\pi}{p} = 1/4$); de *evenwichtsstand* is $\boldsymbol{y = d} = \mathbf{3.}$

Continuïteit van een functie

Als van een functie *f*(*x*), bij *elk origineel x* van het domein D_f, een reële functiewaarde *y* behoort, dan noemt men die functie ***continu*** op D_f. Is van een origineel $x = x_0$ de functiewaarde *y ongedefinieerd* zoals bijvoorbeeld het beeld $y = f(0)$ van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$, dan spreekt men van '*een gat in het domein* D_f'.
De functie heet dan ***discontinu*** in het punt waarvoor $x = x_0$.

Zo is de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ *discontinu* in het punt met $x = 0$ en is de functie $g(x) = \frac{x}{x-4}$ discontinu in $x = 4$. Als een functie $f(x)$ *discontinu* is *in een punt* $x = x_0$, dan kan $f(x)$ een *grenswaarde L* bereiken als *x van links en/of van rechts onbepaald dicht* tot *L* nadert.
Zo'n grenswaarde heet de ***limiet L*** van $f(x)$ **als *x* tot x_0 *nadert*** (*zonder die waarde ooit te bereiken*). Notatie $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, waarna dan per definitie geldt $\boldsymbol{f(x_0) = L}$.

> *Een functie $y = f(x)$ is continu op een interval $[\,x_1\ x_2]$ als voor elke $x = a$ op dat interval $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat. Er geldt dan: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$*

Limiet van een functie

> *L is de limiet van een functie f(x) als x tot x_0 nadert, notatie $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, als voor elke $\xi > 0$,(hoe klein ook) er een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle x met* $\boldsymbol{0 < |x - x_0| < \delta}$ *geldt dat* $\boldsymbol{|f(x) - L| < \xi}$

Populair vertaald: *Hoe dichter x **vanaf links en vanaf rechts** tot x_0 nadert, hoe dichter f(x) tot de limietwaarde L nadert.*

Rekenregels voor limieten

Als $\lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{L_1}$ *en* $\lim_{x\to a} g x) = \boldsymbol{L_2}$, *dan is:*

1. $\lim_{x\to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \boldsymbol{L_1 \pm L_2}$
2. $\lim_{x\to a} \{c.f(x)\} = \boldsymbol{c.\ L_1}$ $\quad (c \in \mathbb{R})$
3. $\lim_{x\to a} \{f(x)\,.\,g(x)\} = \boldsymbol{L_1 . L_2}$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\boldsymbol{L_1}}{\boldsymbol{L_2}}$ mits $\boldsymbol{L_2} \neq 0$
5. $\lim_{x\to a} [\,f(x)^n] = \boldsymbol{L_1}^{\mathbf{n}}$ $\quad (n \in \mathbb{R})$
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{L_1}}$ $\quad (n \in \mathbb{R})$

Voorbeelden **1**. Bereken $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 5}{2x^3 + 3x^2 - 4x}$ $(x \neq 0)$.
Deling van alle termen van $\frac{x^3 + 2x^2 + 5}{2x^3 + 3x^2 - 4x}$ door x^3 geeft $\frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}$ zodat $\lim_{x \to \infty} \frac{\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 5}}{\boldsymbol{2x^3 + 3x^2 - 4x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$
(want $\lim_{x \to \infty} \frac{p}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{q}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{r}{x^3} = 0$ voor p, q en $r \in \mathbb{R}$)

2. Bereken $\lim_{x \to 4} \sqrt[4]{(\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 18x + 24})}$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[4]{(x^3 + 6x^2 + 18x + 24)} =$$
$$\sqrt[4]{\lim_{x \to 4} (x^3 + 6x^2 + 18x + 24\,)} =$$
$$\sqrt[4]{64 + 96 + 72 + 24} = \sqrt[4]{\mathbf{256}} = \mathbf{4}$$

Rechter– en linkerlimieten

Beschouw het geval dat $f(x)$ tot een limietwaarde L_1 nadert, *alleen* als *x* ***vanaf links*** op de *x*-as nadert tot het punt met $x = x_0$. In dat geval noemt men L_1 een ***linkerlimiet van*** *f(x)* in $x = x_0$ en geeft deze aan met $\boldsymbol{\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = L_1}$.

> *L_1 is een linkerlimiet van f(x) in $x = x_0$, notatie $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = L_1$, als bij elke $\xi > 0$ een positieve waarde δ bestaat zodanig dat voor alle x met $0 < |x_0 - x| < \delta$ geldt $|f(x) - L_1| < \xi$*

Als $f(x)$ tot een limietwaarde L_2 nadert, *alleen* als *x* ***vanaf rechts*** op de *x*-as nadert tot het punt met $x = x_0$. dan heet L_2 een ***rechterlimiet van*** *f(x)* in $x = x_0$ notatie $\boldsymbol{\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = L_2}$.

> *L_2 is een rechterlimiet van f(x) in $x = x_0$, notatie $\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = L_2$,als bij elke $\xi > 0$ een positieve waarde δ bestaat zodanig dat voor alle x met $0 < |x_0 - x| < \delta$ geldt $|f(x) - L_2| < \xi$*

De functie $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft *als x tot nul nadert* de ***oneigenlijke*** linker- en rechterlimiet $L_L = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\mathbf{1}}{x} = +\infty$ en $L_R = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{\mathbf{1}}{x} = -\infty$.

Omdat $\boldsymbol{L_1} \neq \boldsymbol{L_2}$, bestaat $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x})$ niet en is dus de functie $f(x) = \frac{\mathbf{1}}{x}$ *discontinu in* $x = 0$.

2. *Vergelijkingen en ongelijkheden*

Bij het oplossen van wiskundige vraagstukken moet je meestal een *vergelijking* opstellen.
Je noemt de *te berekenen waarde: x* en stelt een betrekking *f(x)* op tussen de waarde(n) van *x* en andere van *x* afhankelijke factoren *g(x)*. De *gelijkheid* van de betrekkingen *f (x) en g(x)* leidt dan tot een *vergelijking* $f(x) = g(x)$ waaruit de '*onbekende*' *x* moet worden opgelost.
Steeds geldt hierbij:

> *In een vergelijking f(x) = g(x) mag je:*
> 1. *linker - en rechterlid met eenzelfde getal vermeerderen of verminderen*
> 2. *linker - en rechterlid met een zelfde getal ≠ 0 vermenigvuldigen*

Voorbeeld: $\frac{1}{8}x - \frac{3}{4} = 2x + 3 \Rightarrow 8\,(\frac{1}{8}x - \frac{3}{4}) = 8.(2x + 3) \Rightarrow x - 6 = 16x + 24 \Rightarrow 15x = -30 \Rightarrow \boldsymbol{x = -2}$

Ongelijkheden

Ongelijkheden zijn uitdrukkingen als $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ *en* $a \geq b$
De tekens < = *kleiner dan,* >,*groter dan,* ≤ *kleiner dan of gelijk aan* , ≥ *groter dan of gelijk aan* geven daarin de ***relatie*** aan tussen de waarden van *a* en *b* zoals die op een getallenlijn worden afgebeeld. Hierbij is gedefinieerd:

> *Voor twee reële getallen a en b geldt: a < b als a links ligt van b op de getallenlijn*
> *a > b als a rechts van b op de getallenlijn ligt*

Bij het oplossen van ongelijkheden gelden evenals bij vergelijkingen, twee algemene regels:
1. *In een ongelijkheid mag je linker- en rechterlid met een zelfde getal ± k vermeerderen* want: Als *a* rechts (of links) ligt van *b* op de getallenlijn, dan ligt *ook a ± k rechts (of links) van b ± k* op die lijn. Immers worden beide getallen door optelling van ± *k* over eenzelfde afstand $|k|$ en in dezelfde richting verschoven.
2. Je mag linker- en rechterlid van een ongelijkheid met een zelfde getal *k* vermenigvuldigen **mits *k* > 0** , want als *a* rechts (of links) ligt van *b*, dan ligt ook $k \times a$ rechts (of links) van $k \times b$ op de getallen lijn. Echter: Bij vermenigvuldiging met een ***factor k* < 0** *draait het ongelijkheidsteken om,* doordat nu de getallen *a* en *b* bij de vermenigvuldiging worden *gespiegeld in de oorsprong* waardoor de links/rechts oriëntatie van *a* ten opzichte van *b* verandert. Zo is bijvoorbeeld: $\mathbf{5 < 7}$ maar $\mathbf{-5 > -7}$ en $\mathbf{-10 < -7}$, **maar** $\mathbf{-3 \times -10 > -3 \times -7}$.

> *In een ongelijkheid mag je linker- en rechterlid met een zelfde getal ± k vermeerderen*
> *Je mag linker en rechterterm slechts dan met eenzelfde factor k ≠ 0 vermenigvuldigen*
> *als k > 0. Als k < 0 dan keren de ongelijkheidtekens* om.

Los op de ongelijkheid: $5(x-1) - 3(x-3) \leq 6(x+7) - 2(x+5)$

$5(x-1) - 3(x-3) \leq 6(x+7) - 2(x+5) \Rightarrow 5x - 5 - 3x + 9 \leq 6x + 42 - 2x - 10 \Rightarrow$
$2x + 4 \leq 4x + 32 \Rightarrow -2x \leq 28 \Rightarrow \mathbf{(-1).}\ -2x \geq \mathbf{(-1).}\ 28 \Rightarrow 2x \geq -28 \Rightarrow \boldsymbol{x \geq -14}$

Lineaire stelsels vergelijkingen

Een *lineaire- of eerstegraads* vergelijking is een vergelijking van de algemene vorm:
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n + b = 0$, waarin de coëfficiënten a_k reëel zijn.
De *variabelen* (of 'onbekenden') x_i zijn *hoogstens* van de *eerste* graad. Een *stelsel lineaire vergelijkingen* heet ***afhankelijk*** als een of meer van hen uit een *lineaire combinatie* van een of meer andere volgt. Voorbeeld van een *lineaire combinatie* is: $k \times$ een zekere vergelijking optellen bij $n \times$ een andere vergelijking uit hetzelfde stelsel. (k en $n \neq 0$)
Een stelsel heet ***strijdig***, als lineaire combinaties tot een *ongerijmdheid* leiden zoals *bijvoorbeeld*: $x + 3 = 7$ en $2x + 6 = 11$ of: $6x - 2y = 14$ en $3x - y = -5$.
Een ***onafhankelijk*** stelsel van n ***niet strijdige*** lineaire vergelijkingen met n onbekenden is eenduidig oplosbaar. Is het aantal vergelijkingen *n kleiner* dan het aantal onbekenden *m, dan is het stelsel onoplosbaar*. Is $n > m$ *dan is het aantal oplossingen oneindig groot.* De dimensie van de *oplossingsruimte* is dan $n - m$..

Voor de oplossing van een onafhankelijk stelsel lineaire vergelijkingen wordt meestal de ***eliminatiemethode van Gauss*** *gebruikt.* Een voorbeeld : Gegeven is het stelsel:

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 21 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 23 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 = 5 \end{array}\right\} \quad \text{een onafhankelijk stelsel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden.}$$

Tel de eerste en tweede vergelijking bij elkaar op:

$$\begin{array}{l|c|l} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 21 & 1 & 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 21 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 23 & 1 & \underline{3x_1 + x_2 + 2x_3 = 23} \; + \\ & & 8x_1 + 2x_2 + 0 = 44 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{4x_1 + x_2 = 22} \qquad \ldots(a) \end{array}$$

waarna dan x_3 is '*geëlimineerd'* (weggewerkt).

Uit de tweede en derde vergelijking elimineer je nu x_3 door vermenigvuldigen met respectievelijk 3 en 2 en daarna aftrekken:

$$\begin{array}{l|c|l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 23 & 3 & 9x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 69 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 = 5 & 2 & \underline{4x_1 \qquad + 6x_3 = 10} \\ & & 5x_1 + 3x_2 + 0 = 59 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{5x_1 + 3x_2 = 59} \qquad \ldots(b) \end{array}$$

Uit (a) en (b) volgt:

$$\begin{array}{l|c|l} 4x_1 + x_2 = 22 & 3 & 12x_1 + 3x_2 = 66 \\ 5x_1 + 3x_2 = 59 & 1 & \underline{5x_1 + 3x_2 = 59} \; - \\ & & 7x_1 + 0 = 7 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 1} \end{array}$$

Uit (b): $5x_1 + 3x_2 = 59$ volgt dan met $x_1 = 1$: $5 .1 + 3x_2 = 59 \quad \Rightarrow \; \mathbf{x_2 = 18}$
uit bijvoorbeeld: $5x_1 + x_2 - 2x_3 = 21$ volgt dan $5 + 18 - 2x_3 = 21 \quad \Rightarrow \; \mathbf{x_3 = 1}$

Oplossing van het stelsel is dus $\mathbf{(x_1, x_2, x_3) = (1, 18, 1)}$

Voor lineaire vergelijkingen met meer dan drie onbekenden is de directe eleminatiemethode van Gauss vaak lastig uit te voeren. Met de methode Gauss-Jordan wordt dit overzichtelijker door gebruik te maken van een ***coëfficiëntenmatrix***:

Een m × n- matrix is een getallenschema bestaande uit m rijen en n kolommen

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

De (3 × 4) *coëfficiëntenmatrix* bij het gegeven stelsel links, wordt hierna door A gegeven:

$$A = \left\{\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right\}$$

Op deze coëfficiëntenmatrix (met een vijfde 'controlekolom' (achter de streep) mag je dezelfde *lineaire bewerkingen* en *lineaire combinaties* toepassen als op vergelijkingen. Hierdoor is A om te werken tot eenvoudiger vorm waaruit je de onbekenden x_1,x_2,x_3, x_4 gemakkelijk kunt oplossen..

De strategie van de oplossingsmethode volgens Gauss-Jordan is algemeen:
- Zorg er voor dat op de eerste rij het element $\boldsymbol{a_{11}}$ van de matrix $\neq \mathbf{0}$ is, eventueel door verwisseling van rijen.
- Bewerk de matrix via *lineaire combinaties* met andere rijen zo dat $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$ wordt.
- Werk op de tweede rij naar $\boldsymbol{a_{21}} = \mathbf{0}$ **en** $\boldsymbol{a_{22}} = \mathbf{1}$ door voorgaande bewerkingen herhaald uit te voeren.

Zorg er daarbij voor dat de '*pivots*' $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$ **en** $\boldsymbol{a_{22}} = \mathbf{1}$ *onveranderd blijven* en dat ook *het element* $\boldsymbol{a_{21}}$ op de tweede rij **= 0** ***blijft.***
- Pas dezelfde strategie toe op de derde rij, dus zorg dat '*pivot*' $\boldsymbol{a_{33}} = \mathbf{1}$ wordt en $\boldsymbol{a_{31}} = \boldsymbol{a_{32}} = \mathbf{0}$ zonder de pivots op rij 1 en 2 en de nullen links ervan te veranderen.

Uit de zo ontstane coëfficiëntenmatrix is de oplossing dan gemakkelijk af te lezen.

We passen deze strategie toe op de gegeven coëfficiëntenmatrix A:
a. Verwissel rij 1 en 2 / b Vermenigvuldig rij 1 met −1 / c. Trek 2× rij 1 af van rij 2 / d. Trek 2× rij 1 af van rij 3 / e. Trek rij 2af van rij 3 / f. Trek 11× rij 3 af van rij 2 / g. Tel rij 2 bij rij 3 op / h. Tel 5× rij 3 op bij rij 1.
De matrix A* die nu via de acht transformaties is ontstaan en gelijkwaardig is met A is nu:

$$A^* = \left\{\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 13 & -58 \\ 0 & 1 & 0 & 25 & -101 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right\}$$

waaruit dan volgt:

$$\begin{aligned} x_1 + 13\,x_4 &= -58 \\ x_2 + 25\,x_4 &= -101 \\ x_3 - 2\,x_4 &= 9 \\ x_4 &= x_4 = \text{'}vrij\text{'} \end{aligned}$$

Voor de '***oplossingsvector***' $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vind je als je voor de vrije waarde $x_4 = 0$ kiest: $\boldsymbol{\overline{x} = (-58, -101, 9, 0)}$.
Omdat in deze opgave *drie* vergelijkingen (= *n*) zijn gegeven met vier (= *m*) onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4 is de dimensie van de oplossingsruimte = $m - n = 4 - 3$ dus *eendimensionaal* , waardoor je x_4 vrij kon kiezen. .

Tweedegraadsvergelijkingen

Tweedegraadsvergelijkingen (kwadratische- of vierkantsvergelijkingen) zijn vergelijkingen van de vorm $ax^2 + b + c = 0$ met a, b en $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. De ***variabele*** *('onbekende')* x is *hoogstens van de tweede graad. .*

a. Ontbinden in factoren

Deze methode gebruik je meestal alleen als $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ dus bij vergelijkingen van de vorm $1\,x^2 + bx = c$ (of die daarop zijn te herleiden). De werkwijze is als volgt:
1. Herleid (zo nodig) de vergelijking op nul dus maak het rechterlid gelijk aan 0: zodat de vergelijking $x^2 + bx - c = 0$ wordt.
2. Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf
$\boldsymbol{x^2 + bx - c = (x + p).\ (x + q)} = x^2 + \boldsymbol{(p + q)}\, x + \boldsymbol{p \times q = 0}$ waarin $\boldsymbol{p + q = b}$ en $\boldsymbol{p \times q = -c}$
3. Pas de regel toe: *Als* $r.\ s = 0$ *dan is* $r = 0 \vee s = 0$ ('Wet van het nulelement').
Dus hier: $(x + p)\ .\ (x + q) = 0 \Rightarrow (x + p) = 0 \vee (x + q) = 0$ Gevolg: $\boldsymbol{x = -p \vee x = -q}$

Voorbeeld: *Los op de vergelijking:* $\boldsymbol{x^2 - 7x = -12}$.

Oplossing:

$\boldsymbol{x^2 - 7x = -12} \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 4) = 0 \vee (x - 3) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \vee x = 3}$

b. Kwadraatafsplitsing

Ook deze methode is alleen goed bruikbaar in vergelijkingen als **1** $x^2 + bx + c = 0$ dus als $a = 1$. Twee voorbeelden:
1. Los op $x^2 + 6x - 12 = 0$

De term $6\,x$ is het *dubbelproduct* van x en 3 in $(x + 3)^2 = x^2 + \mathbf{6\,x} + 9$ dus schrijf je:
$x^2 + 6\,x - 12 = 0$ als $(x^2 + 6\,x + 9) - 21$ ofwel: $(x + 3)^2 - 21 = 0$
zodat $x + 3 = \pm\sqrt{21} \Rightarrow \boldsymbol{x = -3 \pm \sqrt{21}}$

2. Los op $x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} = 0$
Hier is de term $\frac{4}{5}x$ het dubbelproduct van x en $\frac{2}{5}$ in $(x + \frac{2}{5})^2 = x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}$ zodat uit
$x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} = 0$ volgt: $(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}) - \frac{4}{25} - \frac{20}{25} = (x + \frac{2}{5})^2 - \frac{24}{25} = 0$
dus $(x + \frac{2}{5}) = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{2}{5} \pm \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2}{5}(-1 \pm \sqrt{6})}$

c. De abc-formule

Algemene oplossing van de vierkantsvergelijking is de *'abc*- formule' $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ die door kwadraatafsplitsing werd afgeleid uit de tweedegraads functie *f(x)* = $ax^2 + bx + c$ en waarin $D = b^2 - 4.a.c$ de discriminant heet. Als $D > 0$ dan heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*, als $D = 0$ dan zijn er *twee samenvallende wortels*.
Als $D < 0$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet in $\mathbb{R}$ dus zijn er geen reële wortels.

Voorbeelden :

1 Los op $6\,x^2 - 12\,x - 1 = 0$

In deze vierkantsvergelijking is $a = 6$, $b = -12$, $c = -1$
$D = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.6.(-1) = 168$, dus $D > 0$.
$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.6.(-1)}}{2.6} = \frac{12 \pm \sqrt{168}}{12} = \frac{12 \pm 2\sqrt{42}}{12} = \mathbf{1} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\mathbf{42}}$

2. Los op $x^2 - x = -1$

$x^2 - x = -1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ dus $D = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4.1.1 = -3$ dus $\mathbf{D < 0}$
De vergelijking is dan in $\mathbb{R}$ (dus zonder complexe getallen) ***onoplosbaar***.

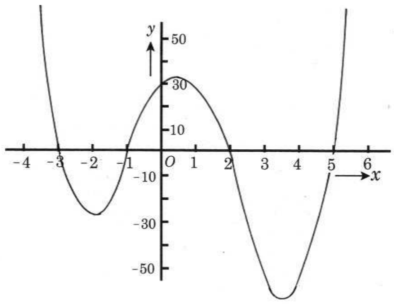
Hogeregraads vergelijkingen

Derde- of hogeregraadsvergelijkingen kan je ***in*** $\mathbb{R}$ slechts dan *algebraïsch* oplossen als ze van speciale samenstelling zijn.
De vergelijking $3x^4 + 5x^2 = 12$ is algebraïsch op te lossen door $x^2 = p$ te stellen zodat deze overgaat in de *vierkantsvergelijking*: $3p^2 + 5p = 12$ waaruit dan met de *abc*-formule volgt $p = -3$ (voldoet niet in $\mathbb{R}$ omdat $p = x^2$) of $\boldsymbol{p = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3}}$ $\boldsymbol{x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}}$ en $\boldsymbol{x_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}}$ zijn de twee reële wortels van de vergelijking. (De twee wortels die niet voldoen zijn complexe getallen).

Ook een vergelijking als $(x - 5)^7 = 134$ is algebraïsch op te lossen:
$(x - 5)^7 = 134 \Rightarrow (x - 5) = \sqrt[7]{134} \Rightarrow \boldsymbol{x = \sqrt[7]{134} + 5}$.

In het algemeen zijn hogere graads vergelijkingen *met uitsluitend reële wortels* alleen langs grafische weg (numeriek met de GR via *intersect*) op te lossen. Een voorbeeld::

Los op: $x^4 - 3x^3 = 15x^2 - 19x - 30$



Plot in de GR de grafiek van $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$ **en de** $\boldsymbol{x}$**-as** $\boldsymbol{y = 0}$ **.**
Kies in [WINDOW]: $X_{min} = -5$, $X_{max} = 6$, $Y_{min} = -50$, $Y_{max} = 50$; Xscl = 1, Yscl = 10
Via [TABLE] en [CALC} 5 *intersect* GR vind je de $\boldsymbol{x}$-waarden van de snijpunten van de gegeven functie met de y-as in 4 stappen
$\boldsymbol{x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5.}$

De vergelijking $x^3 - 1 = 0$

Van de derdegraadsvergelijking $x^3 - 1 = 0$ ofwel $\boldsymbol{x^3 = 1}$ kan je direct zien dat $x = 1$ *een oplossing* is. Dit betekent dan dat de term $x^3 - 1$ deelbaar is door $x - 1$ dus dat je de vergelijking kunt schrijven als $x^3 - 1 = (x - 1).\ f(x)$ waarin dan $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
Werk je deze deling uit als een staartdeling dan vind je $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ dus
$x^3 - 1 = (x - 1).\ (x^2 + x + 1) = 0$ met als oplossing: $\boldsymbol{x - 1 = 0}$ $\vee$ $x^2 + x + 1 = 0$
Hiervan geeft $(x - 1) = 0$ de triviale oplossing $x = 1$ waarvan je bent uitgegaan, maar de vierkantsvergelijking $x^2 + x + 1 = 0$ is in $\mathbb{R}$ *onoplosbaar* omdat de discriminant
$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$.
Om toch oplossingen te creëren heeft met het ***imaginaire getal*** i ingevoerd en daarvoor gedefinieerd dat $\boldsymbol{i^2 = -1}$**, dus** $\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$**.**
De hierop gebaseerde getallen vormen de verzameling $\mathbb{C}$ van de *complexe getallen.*
Met complexe getallen kun je vaak rekenen als met reële getallen, mits je ***de wortel uit een negatief getal*** zoals bijvoorbeeld $\sqrt{-7}$ ***vervangt door*** $\boldsymbol{\sqrt{7\ i^2}}$.
Hierdoor kan je nu de wortels van $x^2 + x + 1 = 0$ met negatieve discriminant 'gewoon' berekenen met de abc-formule: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$ waarin $a = 1$, $b = 1$ en $c = 1$ dus
$D = b^2 - 4\,a.c. = -3$ zodat

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{\mathbf{-1 \pm \sqrt{-3}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{-1 \pm \sqrt{i^2.\ 3}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{-1 \pm\ i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

dus $\boldsymbol{x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$ $\vee$ $\boldsymbol{x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$
Volledige oplossing van de vergelijking $x^3 = 1$ wordt dan:
$\boldsymbol{x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$ dus met één reële en *twee complexe wortels.*

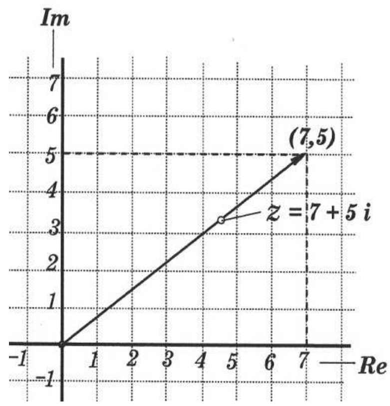
De vergelijking $x^3 + 1 = 0$

Ook deze vergelijking kun je nu oplossen als je ziet dat $\boldsymbol{x = -}\ 1$ een triviale oplossing is, dus het linkerlid van $x^3 + 1 = 0$ deelbaar is door $x + 1$ zodat $x^3 + 1 = (x + 1).\ g(x) = 0$
Gevolg: $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ waarvan uit de staartdeling volgt dat $g(x) = x^2 - x + 1$, dus
$x^3 + 1 = (x + 1).\ (x^2 - x + 1)$. De wortels van $x^3 = -1$ volgen uit $x^3 + 1 = 0$ dus uit
$(x + 1).\ (x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1) = 0 \vee (x^2 - x + 1) = 0$.
Uit $x + 1 = 0$ volgt de triviale oplossing $\boldsymbol{x = -1}$**.** Van d**e** vierkantsvergelijking $x^2 - x + 1 = 0$ is de discriminant $D = 1 - 4 = -3$, die je oplost met de abc-formule en de imaginaire waarde i :

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{\mathbf{1 \pm \sqrt{-3}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1 \pm \sqrt{i^2.\ 3}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1 \pm\ i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

Volledige oplossing van de vergelijking $x^3 = 1$ wordt dan:: $\boldsymbol{x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}$
dus weer met één reële en twee complexe wortels.

Basisidee achter complexe getallen



Op de imaginaire eenheid i zijn de *complexe getallen z van de* verzameling $\mathbb{C}$ gebaseerd. Ze kunnen worden voorgesteld als ***vectoren*** met een ***reële-*** *en een **imaginaire** component.* In de figuur wordt het complexe getal $z = 7 + 5\,i$ voorgesteld door de vector (7, 5) ('pijl') in een assenstelsel met een horizontale *reële x-as Re* en een verticale *imaginaire y-as Im.* *Zuiver imaginaire* getallen zijn de complexe getallen $z = a + b.i$ waarin de reële component $\boldsymbol{a = 0}$ dus de getallen $\boldsymbol{z = b.i.}$ Als de component $\boldsymbol{b = 0}$ dus de getallen $\boldsymbol{z = a}$ dan is *z een reëel getal.* De *reële getallen* ($\mathbb{R}$) en de *imaginaire getallen* zijn dus ***deelverzamelingen*** van de complexe getallen $\mathbb{C}$.

Exponentiële vergelijkingen

Exponentiële vergelijkingen zijn vergelijkingen van de vorm $a^{f(x)} = b$ ($b > 0$) dus die waarbij de ***exponent van een macht*** *een functie is van de variabele x.*
Voorbeelden van berekening: $2^{x+2} = 32 \Rightarrow 2^x.2^2 = 4.\ 2^x = 32$ dus $2^x = 8 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$
$7^{x-3} = 49 \Rightarrow \frac{7^x}{7^3} = 49$ dus $7^x = 49.\ 7^3 = 7^5 \Rightarrow \boldsymbol{x = 5}$
Als gegeven is: $a^x = b$ ($b > 0$) dan volgt uit de *definitie van logaritmen* direct dat $x = {}^a\log\, b$
Is de vergelijking $2^x = 20$ dan is $\boldsymbol{x = {}^2\log\ 20}$ de *exacte oplossing* .
Om de waarde van de oplossing via de GR-TI-83 te *benaderen,* gebruik je de eigenschap van ***logaritmen*** ${}^a\log\ b = \frac{\log b}{\log a}$, dus hier ${}^2\log\ 20 = \frac{\log 20}{\log 2} \approx \boldsymbol{4{,}32}$ (blz.6)

Exacte oplossing van de exponentiële vergelijking $a^x = b$ ($b > 0$) *is* $x = {}^a\log\ b = \frac{\log b}{\log a}$

Ingewikkelder exponentiële vergelijkingen moet je oplossen door te werken naar een eindvorm als $\mathbf{g}^x = \mathbf{g}^y$ dus naar een vorm met *in het rechter- en linkerlid machten van eenzelfde grondtal,* waaruit dan direct volgt dat $x = y$. Hierbij maak je gebruik van de machtregels:

$a^p.\ a^q = a^{p+q}$	$(a^p)^q = a^{p.q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^0 = 1$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a.b)^p = a^p.\ b^p$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Voorbeelden:
Los de volgende exponentiële vergelijkingen op:

$\boldsymbol{2^{x+1} = 4^{3x+1}} \Rightarrow$
$2^{x+1} = 2^{2(3x+1)}$
$= 2^{6x+2}$
$x + 1 = 6x + 2$
$\boldsymbol{x = -\frac{1}{5}}$

$\boldsymbol{0{,}5^x = 0{,}25.\ 2^x} \Rightarrow$
$(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^2.\ 2^x$
$\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^2}.2^x$
$2^{-x} = 2^{-2}.2^x$
$-x = x - 2$
$\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{2^{x+3} - 2^x = \frac{7}{8}} \Rightarrow$
$2^x.\ 2^3 - 2^x = 7.\ 2^{-3}$
$8.\ 2^x - 2^x = 7.\ 2^{-3}$
$7.\ 2^x = 7.\ 2^{-3}$
$\boldsymbol{x = -3}$

$\boldsymbol{2^{x-1} + 2^{x+1} = 10} \Rightarrow$
$\frac{1}{2}.\ 2^x + 2.\ 2^x = 5.\ 2^1$
$\frac{5}{2}.\ 2^x = 5.\ 2^1$
$5.\ 2^{x-1} = 5.\ 2^1$
$x - 1 = 1$
$\boldsymbol{x = 2}$

Vaak ook worden voor het oplossen van exponentiële vergelijkingen *substituties* gebruikt, dus het vervangen van een macht a^x door een hulpvariabele p, waardoor een gemakkelijker op te lossen *schaduwvergelijking* in p ontstaat.

Een voorbeeld: Los op: $3^x + 5.(\frac{1}{3})^{x-2} = 18$

$3^x + 5.(\frac{1}{3})^{x-2} = 3^x + 5.(\frac{1}{3})^x.(\frac{1}{3})^{-2} = 3^x + 5.(\frac{1}{3})^x.9 = 3^x + \frac{45}{3^x} = 18$

Noem $\boldsymbol{3^x = p}$ de vergelijking gaat dan over in: $p + \frac{45}{p} = 18 \Rightarrow p^2 - 18p + 45 = 0 \Rightarrow$

$(p-3)(p-15) = 0 \Rightarrow p = 3 \vee p = 15. \Rightarrow p = 3$ geeft $3^x = 3 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ en uit $p = 15$ volgt $3^x = 15$

$\Rightarrow \boldsymbol{x = {}^3\log 15}$. Beide waarden voldoen

Voorbeeld van een ***exponentiële ongelijkheid***:

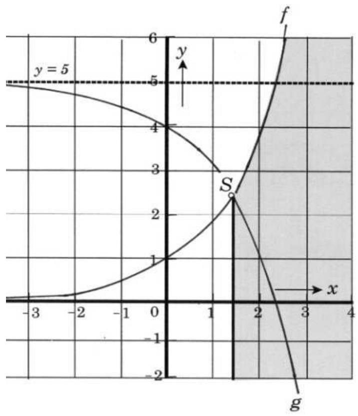
Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = 5 - 2^x$

a. Teken de grafieken van f en g en bepaald hun asymptoten

b. Los de *ongelijkheid* op $f(x) \geq g(x)$.

a. De grafieken van f en g teken je via onderstaande tabel:

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
$f(x) = 2^x$	1	2	4	8	0,5	0,25	0,125
$g(x) = 5 - 2^x$	4	3	1	–3	4,5	4,75	4,785



$f(x) = 2^x$ dus als $x \to -\infty$ dan $2^x \to 0$ want $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2^x}\right) = 0$.

De ***x*-as** is dus een *horizontale asymptoot van f*.

Verder is: $g(x) = 5 - 2^x$ dus als $x \to -\infty$ dan $2^x \to 0$ en

$y = 5 - 2^x \to 5$. De lijn $\boldsymbol{y = 5}$ is *horizontale asymptoot* van g

b. $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ geeft $2^x = 5 - 2^x \Rightarrow 2.2^x = 5 \Rightarrow 2^{x+1} = 5 \Rightarrow$

${}^2\log 5 = x + 1 \Rightarrow x + 1 = \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} - 1 \Rightarrow \boldsymbol{x \approx 1{,}32.}$

Het snijpunt van f en g is dus het punt S met $x_S \approx 1{,}32$.

Uit de figuur (geschaduwd) blijkt dan: $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[\boldsymbol{1{,}32}\ ;\ \to\rangle$

Logaritmische vergelijkingen

Exponentiële vergelijkingen loste je algebraïsch op door te werken naar een eindvorm $\boldsymbol{g^x = g^y}$ dus met *in het rechter- en linkerlid eenzelfde grondtal,* waaruit dan volgde: $\boldsymbol{x = y}$.
Zo wordt ook bij ***logaritmische*** vergelijkingen gewerkt naar *gelijke grondtallen g* dus naar de vorm ${}^g\log a = {}^g\log b$ waaruit dan volgt $a = b$. Immers: als ${}^g\log a = {}^g\log b = p$ dan is $g^p = a$ en ook $g^p = b$, dus $\boldsymbol{a = b} = g^p$.
Maak verder gebruik van de eigenschappen van logaritmen op blz.6.

NB: Bewijs van de eigenschap: $\boldsymbol{{}^{1/g}\log x = -\,{}^g\log x}$

Noem $\boldsymbol{{}^{1/g}\log x = p}$, dan is $(\frac{1}{g})^p = x \Rightarrow \frac{1^p}{g^p} = \frac{1}{g^p} = g^{-p} = x$ zodat $\boldsymbol{{}^g\log x = -p}$ ...(1)

Uit $\boldsymbol{{}^{1/g}\log x = p}$ en $\boldsymbol{{}^g\log x = -p}$ uit (1) volgt dan $\boldsymbol{{}^{1/g}\log x = -\,{}^g\log x}$ zoals werd gesteld.

Los op de vergelijkingen

1. ${}^2\log(x + 3) = 3 + {}^2\log x$

Schrijf de constante 3 *als* ${}^2\log 8$ dan wordt het *rechterlid* van de vergelijking
${}^2\log 8 + {}^2\log x = {}^2\log 8 + {}^2\log x = {}^2\log(8.x)$ (volgens ${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$)
Gevolg: ${}^2\log(x + 3) = {}^2\log(8.x) \Rightarrow x + 3 = 8x \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{3}{7}}$. (*Voldoet* want $\frac{3}{7}$ en $3\frac{3}{7} > 0$)