

Basislijn

Brugklaswiskunde voor vmbo, mavo, havo en vwo

Bij deze vernieuwde uitgave

Dit boek is een volledige herziening van de oorspronkelijke methode 'Basislijn' voor de Basisvorming Wiskunde van het vmbo/mavo en havo/vwo. (Uitgeverij 'De Kangoeroe, Baarn 1994).

In dat jaar werd de Basisvorming ingevoerd, met '*Kerdoelen*' voor alle bestaande schoolvakken en de nieuwe vakken zoals techniek, handwerken, kunstgeschiedenis. Belangrijke uitgangspunten voor de *kerndoelen van de wiskunde*, waren onder andere: Minder aandacht voor het 'zuivere letter rekenen', meer aandacht voor het rekenen van de basisschool, invoer van nieuwe onderwerpen zoals Grafen en Kijkmeetkunde. Ook aan de Geschiedenis van de wiskunde moest meer aandacht worden besteed en het vak zou in het algemeen wat meer 'vakoverstijgend' moeten worden, door er ook andere schoolvakken in te betrekken.

Van de 'Verzamelingenleer' werd bij de basisvorming definitief afscheid genomen, (vooral doordat deze te hoge eisen stelde aan het taalbegrip van veel leerlingen), en werd vervangen door de nieuwe 'Realistische Wiskunde'.

Hierin wordt bij voorkeur *praktisch toepasbare wiskunde stof* behandeld, zoals dat ook al geruime tijd gangbaar is bij de eindexamens.

Gedateerde - of anders onbruikbaar gebleken stof uit de eerdere uitgave is weggelaten maar de wat 'speels ogende' benadering' met plak- en knipwerk is in stand gebleven vanwege de belangrijke didactische betekenis.

De methode is door de concentrische behandeling van de stof zowel geschikt als klassikale lesmethode voor de eenjarige of tweejarige basisvorming in de brugklassen van respectievelijk havo/vwo en vmbo/mavo, als op zichzelf staande methode voor individueel gebruik.

De met een ster gemerkte opgaven zijn in principe voor havo en vwo.

Ook enkele 'Wiswasjes' bleven behouden en voor wat de naam WISWASJE betreft: WIS staat voor de associatie met *wiskunde*, WAS voor die met *geschiedenis* en WISWASJE *als geheel* is geassocieerd met *wiswasje*, omdat het onderwerp in dit leerstadium voor de wiskunde zelf, nog van ondergeschikte betekenis is.

Ik hoop dat deze uitgave aan de verwachtingen zal mogen voldoen en houd me voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Bij deze hernieuwde druk:

In deze nieuwe druk zijn enkele correcties aangebracht en in de antwoorden sommige figuren verduidelijkt.

Overigens is deze druk vrijwel geheel gelijk aan de vorige.

Inhoudsopgave

- 1 *Situaties in beeld* 6**
 - 1.1 Werken met grafen 7
 - 1.2 Varen langs de Normandische kust 7
 - 1.3 Rondvaarten 7
 - 1.4 Zeeziekte aan boord 8
 - 1.5 Rondvaarten met een gouden randje 8
 - 1.6 Graaf in de stad 9
 - 1.7 Routes plannen met een graaf 10
 - 1.8 Graaf in het gezin 11
 - 1.9 Belboom 11
 - 1.10 Volleybaltoernooi 12
 - 1.11 Een ander toernooi 14
- 2 *Tekenen van een graaf* 16**
 - 2.1 Gelijke grafen 16
 - 2.2 Grafen-paren 17
 - 2.3 Tekenpuzzels 17
 - 2.4 Gebouw(d) voor Gerard 19
 - 2.5-a Graaf en bloedgroepen 21
 - 2.5-b Samenvatting grafen 21
 - 2.6 Een wiswasje 22
- 3 *Even meten* 23**
 - 3.1 Oude maatjes 23
 - 3.2 Zoveel hoofden zoveel maten 24
 - 3.3 Historische proef voor in de klas 25
 - 3.4 Te land en ter zee 26
 - 3.5 Standaardmaten 26
 - 3.6 Meten met je platte hand 28
 - 3.7 Inhouden meten 29
 - 3.8 Het Metrieke Stelsel 30
- 4 *Mooi symmetrisch* 31**
 - 4.1 Lijnsymmetrie 32
 - 4.1-a De andere helft doet de spiegel 32
 - 4.1-b Halve figuren heel knippen 33
 - 4.1-c Meer dan één spiegelas 33
 - 4.1-d Spiegelsymmetrie in het alfabet 34
 - 4.1-e Ikjes knippen 35
 - 4.2 Draaisymmetrie 35
 - 4.2-a Kleedje maken 36
 - 4.3 Kunst op het perron 37
 - 4.4 Wiskundig jargon 37
 - 4.5 Symmetrische kunstwerkjes 38
 - 4.6 't Stikt hier van de kikkers 39
 - 4.7 Schuifsymmetrie 40
 - 4.8 Griekse Meanderrand 40
 - 4.9 Ware kunststukjes 41
- 5 *Symmetrie van meetkundige figuren* 42**
 - 5.1 Gelijke vormen 42
 - 5.2 Gelijke vorm en afmetingen 43
 - 5.3 Vergelijkend vormonderzoek 44
 - 5.4 Spiegelen van meetkundige figuren 45
 - 5.5 Spiegelen met passer en liniaal 45
 - 5.6 Driehoek spiegeen 46
 - 5.7 Symmetrische driehoeken 46
 - 5.8 Kijk op oude bekenden 46
 - 5.9 Van goede huize 47
 - 5.10 Buurtonderzoek 48
 - 5.11 Parallologram als verknipte vlieger 49
 - 5.12 Zeker weten? 50
 - 5.13 Diagonalen van het parallellogram 51
 - 5.14 X-hoeken 51
 - 5.15 F-hoeken 52
- 6 *Even rekenen* 53**
 - 6.1 Optellen en aftrekken 53
 - 6.2 Gemakkelijke producten 53
 - 6.3 Handige truc 54
 - 6.4 Wiskunde truc 54
 - 6.5 Delen 55
 - 6.6 Rekenpuzzels 56
- 7 *Meer in je macht* 56**
 - 7.1 Machtsverheffen 57
 - 7.2 Takkensom met machten 57
 - 7.3 Kwadraten en wortels 59
 - 7.4 Meer machten 59
 - 7.5 Vermenigvuldigen wordt optellen 60
 - 7.6 Ontbinden in factoren 61
 - 7.7 Een machtig leger 62
 - 7.8 Familietakken 63
 - 7.9* Huurverhoging 63
 - 7.10 Machten van tien 64
- 8 *Gelijkheden en ongelijkheden* 65**
 - 8.1 Manden met fruit 65
 - 8.1 a Nu volgens de regels 66
 - 8.1 b Ook met min 66
 - 8.1 c Plus en min door elkaar 67
 - 8.2 Verdeeleigenschap 67
 - 8.3 Oplossingen met een weegschaal 67
 - 8.4 Wiskundepuzzels 68
 - 8.5 Ongelijkheden op de weg 70
 - 8.6 Getallen tussen twee grenzen 71
 - 8.7 Vraagstukken 72
 - 8.8 Wiskunde en ondergoed 72
 - 8.9 Oplossingen met eigenschap 1. 73
 - 8.10 Oplossingen met eigenschap 2 73
 - 8.11 Wegen en ongelijk houden 74
 - 8.12 Prijsbewust 75
 - 8.13 Kiezen met een grafiek 75
 - 8.14 Pas op met min 76

- 8.15 Even oefenen 78
 8.16 Oplossen met bordjes 79
 8.17 Ingeklede vergelijkingen 80
 8.18 Twee antwoorden goed 81
 8.19 Nu kwadraten op je bordje 81
- 9 *Meten en weten* 83**
- 9.1 Op weg met Pythagoras 84
 9.2 Meten door tekenen 84
 9.3 Rechte hoeken met knopentouwtje 85
 9.4 Geheim van de twaalf knopen 86
 9.5 Meer knopentouwtjes 86
 9.6 Van knopenlegger tot landmeter 87
 9.7 Pythagoras zonder omwegen 88
 9.8 Pythagoras in formule 88
 9.9 Van kleitablet tot calculator 89
 9.10 Pythagoras in de gymzaal 90
 9.11 Pythagoras in een rooster 91
 9.12 Ongeveer drie keer stam is bast 91
 9.13 Bomen worden munten 92
 9.14 Ongeveer drie wordt pi 93
 9.15 Rol scheepstouw 95
 9.16 Pi op de fiets 95
 9.17 Kringzitten 96
 9.18 Rond het meer 96
 9.19 Oppervlakte van figuren 97
 9.20 Figuren in een rooster 98
 9.21 Driehoek als half parallellogram 98
 9.22 Een duistere driehoek 99
 9.23 Verknijpte cirkel 100
 9.24 Strooien met bruine suiker en graszaad 101
 9.25 Inhoud van lichamen 102
 9.26 Eén inhoudsregel voor vele vormen 102
 9.27 Nog meer prisma's 103
 9.28 Inhoud van een piramide 104
 9.29 Terug bij Archimedes 107
 9.30 Archimedes tot in het oneindige 107
 9.31* Tweeduizendjaar later 108
 9.32 Pi per computer 109
 9.33 Knopentouwtjes 109
- 10 *Tellingen met conclusies* 110**
- 10.1 Wiskunde repetitie 111
 10.2 Gemiddelde truc 112
 10.3 Van cavia tot goudvis 112
 10.4 De populaire goudvis 114
 10.5 Gekke en valse gemiddelden 114
 10.6 Cijfers en verzuim 115
 10.7 Verjaardagen 117
 10.8 Tijd voor nieuwe sokken? 118
 10.9 Dobbelen turven en tekenen 119
 10.10 Fris 'op de korrel' 120
 10.11 Even puzzelen 121
- 10.12 Natte of droge maand 121
 10.13 Schoenmaten en schoensmeer 122
 10.14 Lengteklassen 123
 10.15 Lengten van meisjes 123
 10.16 Zware jongens 124
 10.17 Zware meisjes 125
- 11 Kijk op kans 126
- 11.1 Kermisattractie 127
 11.2 Dobbelen met een prima 128
 11.3 Kansen bij het kaarten 129
 11.4 Tossen om te mogen kiezen 130
 11.5 Meisje of jongen? 131
 11.6 Bord van Galton 131
 11.7 Driehoek van Pascal 133
- 12 *Hoekmeetkunde* 135**
- 12.1 Hellingen, hoeken en verhoudingen 136
 12.2 Hellingen zonder gejdodel 137
 12.3 Tangens tekenen en opzoeken 138
 12.4 Ondergesneeuwde hellingen terugvinden 139
 12.5 Andere goniometrische verhoudingen 141
 12.6 Terug in de bergen 141
 12.7 Hellingshoeken meten 143
 12.8 Sinus zonder omwegen 144
 12.9 Sinus met de knoppen 145
 12.10 Laatste goniometrische verhouding 146
 12.11 Cosinus heen en weer 147
 12.12 Sinus & co op de ladder 148
 12.13 Om gemakkelijk te onthouden 149
- 13 *Goniometrische problemen* 150**
- 13.1 Algemene oplossingsmethoden 150
 13.2 'L.l.l land vooruit' 151
 13.3 Hollandse vlag 152
 13.4 Verkeerde eiland 152
 13.5 Frutti Mare zonder pizza 152
 13.6 Droog zitten bij natte Moesson 153
 13.7 Een wiswasje 154
- 14 *Gevarieerde onderwerpen* 155**
- 14.1 Figuren en schalen 155
 14.2 Vermenigvuldigen met passer en liniaal 156
 14.3 Groot sterrenbeeld 156
 14.4 Klein sterrenbeeld 157
 14.5 Je eigen judoka's 157
 14.6 Vermenigvuldigen in een rooster 158
 14.7 Product van diverse objecten 159
 14.8 Rationele factoren 159
 14.9 Stukje techniek 160
 14.10 Paard van Marken 160
 14.11 Andere foto's 161
 14.12 Reële vermenigvuldigingsfactoren 162
 14.13 De factor wordt negatief 162
 14.14 Negatief product van een ster 162
 14.15 Twee negatieven van een vierkant 163

- 14.16 Vermenigvuldigen van een vlinder 163
 14.17 Evenredigheden en gelijkvormigheid 165
 14.18 Een handig rekenhulpje 165
 14.19 Rekenen met evenredigheden 166
 14.20 Wie hoort bij wie? 167
 14.21 Hoofdeigenschap evenredigheden 167
 14.22 Laatste evenredigheid 168
 14.23 Gelijkvormige lichamen 169
15 Finish Basislijn 170
 15.1 Cirkels 170
 15.2 Kijklijnen en kijkhoeken 170
 15.3 Hoeken en koersen 171
 15.4 Coördinaten 171
 15.5 Verbanden en relaties 172
 15.6 Lineaire en kwadratische verbanden 173
 15.7 Banksaldo in beeld 173
 15.8 Lineair verband bij cirkels 174
 15.9 Kwadratisch verband bij cirkels 175
 15.10 Dalparabool 176
 15.11 Bergparabool 177
 15.12 Broers en zussen 178
 15.13 Stenen gooien 180
 15.14 Samenvatting van parabolen 181
 15.15 Evenredige verdelingen 182
 15.16 Eerlijk delen 182
 15.17 Hoe meer, hoe minder 183
 15.18 Recht- of omgekeerd evenredig 185
 15.19 Recht evenredig snel uit de tabel 185
 15.20 Omgekeerd evenredig uit de tabel 186
 15.21 De hyperbool 186
 15.22 Hyperbool van snelheden 188
 15.23 Licht aan voor Barbara 188
 15.24 Eratostenes anno 2000 189
 15.25 Kruisgetal puzzel 190

Antwoorden/ uitwerkingen 192- 218



Carl, Friedrich Gauss, (1777–1855), geniaal wiskundige. Nauwelijks drie jaar oud betrapte hij zijn vader al op een foutieve optelling in loonlijsten. Gauss zal dan ook wel gelijk hebben als hij van zichzelf beweert de elementaire rekenregels al te hebben bedacht voordat hij goed kon praten. Gauss was dan ook een wonderkind, de ‘Mozart van de Wiskunde’. Toen hij tien jaar oud was, gaf zijn onderwijzer die even de klas uit moest om een moeder te spreken, de klas de opdracht om te berekenen hoeveel de som was van de getallen 1 t/m 100. Nog voordat de onderwijzer het lokaal uit was gaf Karelkje Gauss het goede antwoord: **5050**. Hoe kon dat?

Karelkje bedacht dat $1+99 = 2+98 = 3+97 = \dots + 49+51 = 100$.

Totaal dus $49 \times 100 = 4900$.

In het midden van die rij blijft dan nog **50** over en aan het eind van de rij nog **100**.

Totale som van de getallen 1 t/m 100 is dus $4900 + 50 + 100 = 5050$.

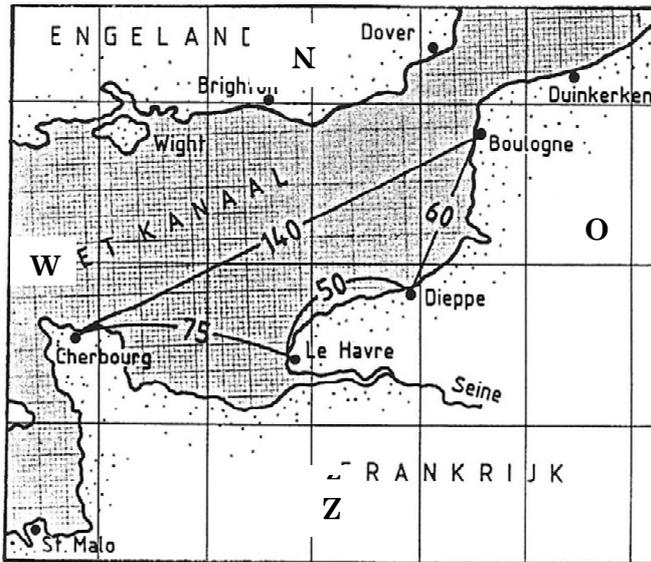
1. Situaties in beeld

Met je snelle motorjacht wil je de zomervakantie doorbrengen aan de Normandische kust in Frankrijk. Een prachtig vaargebied met schilderachtige haventjes waarvan sommige bij laagwater 'droogvallen', omdat het water bij eb wel tien meter zakt .

Op het getekende kaartje zie je 'Het Kanaal' met langs de Franse kust de havenplaatsen Boulogne, Dieppe, Le Havre en Cherbourg.

Met zo'n kaartje krijg je al direct een aardig overzicht van de situatie.

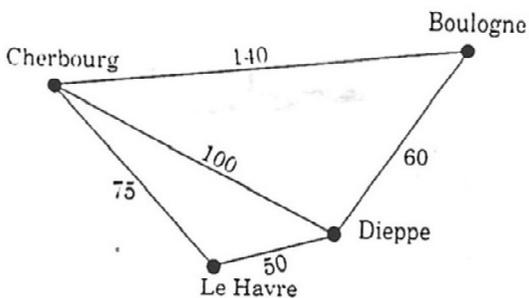
Op echte zeekaarten vind je natuurlijk veel uitgebreider gegevens over waterdiepten, havens en vaarroutes.



	Boulogne	Dieppe	Le Havre	Cherbourg
Boulogne	/			
Dieppe	60	/		
Le Havre	90	50	/	
Cherbourg	140	100	75	/



In de tabel staan alle afstanden in zeemijlen tussen de havens **over zee gemeten**. Voor een routeplanning, waarin het bijvoorbeeld om de keuze van een bepaald traject gaat, bestaat een speciale wiskundige figuur: een **netwerk** ofwel **graaf**.



Van de situatie aan de Franse kust zie je zo'n graaf hiernaast: Je tekent elke *plaats* als een *stip* en elke *verbinding* als een *lijntje* met soms hun afstand ertussen, hier dus het aantal (zee)mijlen uit de tabel.

Kaarten, tabellen, grafen zijn allemaal figuren die bepaalde situaties in beeld brengen.

'Grafische hulpmiddelen' worden ze genoemd, maar let wel :

**In een graaf gaat het alleen om de punten en de wegen (verbindingen).
De afstanden daartussen hoeven niet op schaal te zijn getekend
Ook de hoeken tussen de wegen zijn willekeurig gekozen**

Sommige gegevens haal je gemakkelijk uit de *graaf*, bijvoorbeeld hoeveel mijl een tocht langs alle vier de havenplaatsen is, en weke verschillende routes je zou kunnen volgen.

Voor andere zaken is de *tabel* weer duidelijker.

Om te zien dat je niet op automatische piloot rechtstreeks van Dieppe naar Boulogne moet proberen te gaan varen, kan je maar beter even op de kaart kijken.

Je wilt toch niet met je dure motorjacht een stuk afsnijden over land ?

Of riskeer je het maar dat je een Fransman met z'n Citroën in je schroef krijgt ?

Over kaarten en tabellen, maar vooral over grafen gaat dit eerste hoofdstuk.

1.1 *Werken met grafen*

Eerst ga je een paar grafen voor het samenstellen van toeristische routes gebruiken maar daarna zul je zien dat er veel grafen bestaan die niets met kaarten en verbindingswegen te maken hebben.

1.2 *Varen langs de Normandische kust*

Kijk naar de graaf op de vorige bladzijde. Er is geen *directe route* van Le Havre naar Boulogne of omgekeerd aangegeven: Je vaart altijd via Dieppe.(heeft met de tijd en het getij te maken.)

- a. Welke verschillende rondreizen zijn er mogelijk met vertrek en aankomst in Dieppe?
- b. Hoeveel mijl is een rondreis Dieppe-Cherbourg -Le Havre -Dieppe?
De gemiddelde snelheid van je motorjacht (rekening houdend met stroom) is 10 knopen (= 10 zeemijlen per uur). Hoe lang doe je over zo'n rondreis?

1.3 *Rondvaarten*

Na twee weken varen is je vakantiegeld al bijna op en Pa en Ma willen niet bijspringen.

Je besluit om trajecten te gaan varen met betalende passagiers.

Plaats van aankomst en vertrek is steeds Dieppe.

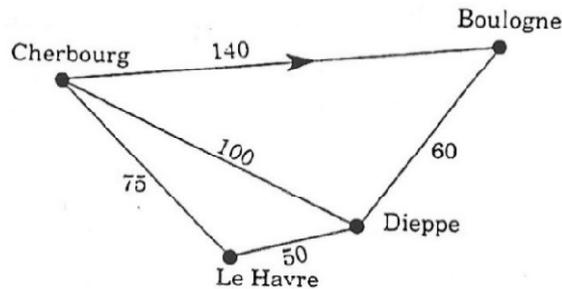
- a. Hoeveel mijl is de langste rondvaart?
Hoeveel mijl is de kortste rondvaart ?
- b*. Voor de kortste reis reken je € 540. Voor de langste reis reken je € 780.
“Merde, merde” zegt een wat driftige Franse passagier “De verschillen in prijs tussen het kortste en langste traject kloppen voor geen meter” .
Leg uit waarom die Fransman ongelijk heeft.

1.4. Zeeziekte aan boord

Op weg van Boulogne naar Cherbourg worden passagiers soms zeeziek doordat de wind meestal zuidwest is en je dan, ver uit de kust, bijna recht tegen de hoge golven vanuit Het Kanaal in moet varen. Kijk maar naar het kaartje op blz. 6 en let op **N**(oord) **O**(ost) **Z**(uid) en **W**(est).

Terug hebben de passagiers meestal geen last: Cherbourg-Boulogne gaat prima en ook op de andere trajecten wordt zelden iemand zeeziek. Je wilt daarom het traject tussen Cherbourg en Boulogne voortaan alleen in de 'prettige richting' varen.

In de graaf hieronder zie je een pijl getekend waaruit je dat kunt aflezen.

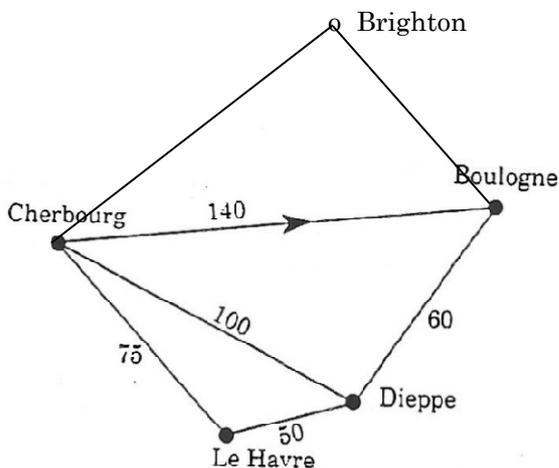


ONTHOUD

Een graaf waarin één of meer richtingspijlen voorkomen heet een gerichte graaf

1.5 . Rondvaarten met een gouden randje

Dieppe 14 juli. Vandaag, toch al een nationale feestdag in Frankrijk, stapt een rijke Amerikaan bij je aan boord. "Happy days are here again", want hij biedt \$ 1000.- voor een rondvaart langs de vier Franse havenplaatsen, maar dan wil hij ook nog naar Brighton aan de Engelse kust om de beroemde krijtrotten vanuit zee te zien. Hieronder is de graaf nogmaals getekend, nu met de havenplaats Brighton erbij



- Het is mogelijk om de rondvaart .
vanuit Boulogne te maken waarbij je zes trajecten precies één keer vaart. Welke route moet dan worden gevaren om weer in Boulogne aan te komen .
- De lengten van de trajecten Boulogne-Brighton en Cherbourg-Brighton staan niet in de graaf, maar je kunt wel zeggen dat de som van die twee afstanden groter is dan 140 mijl. Waarom is dat zo?

Je besluit nog dezelfde ochtend om 10 uur vanuit Dieppe naar Boulogne te varen, om *van daaruit* de rondreis met je Amerikaanse passagier te beginnen.

Je hebt inmiddels op de zeekaart gezien dat de afstand van Boulogne naar Brighton 70 mijl is en de afstand Brighton - Cherbourg 90 mijl.

c. Hoe lang gaat de hele rondreis duren als je 's nachts wil doorvaren ('wachtlopen' met je passagier) die na Boulogne in alle vier de havens twee uur foto's wil nemen voor thuis?

Als het donker is drinken ze wel wat, of gaan even slapen.

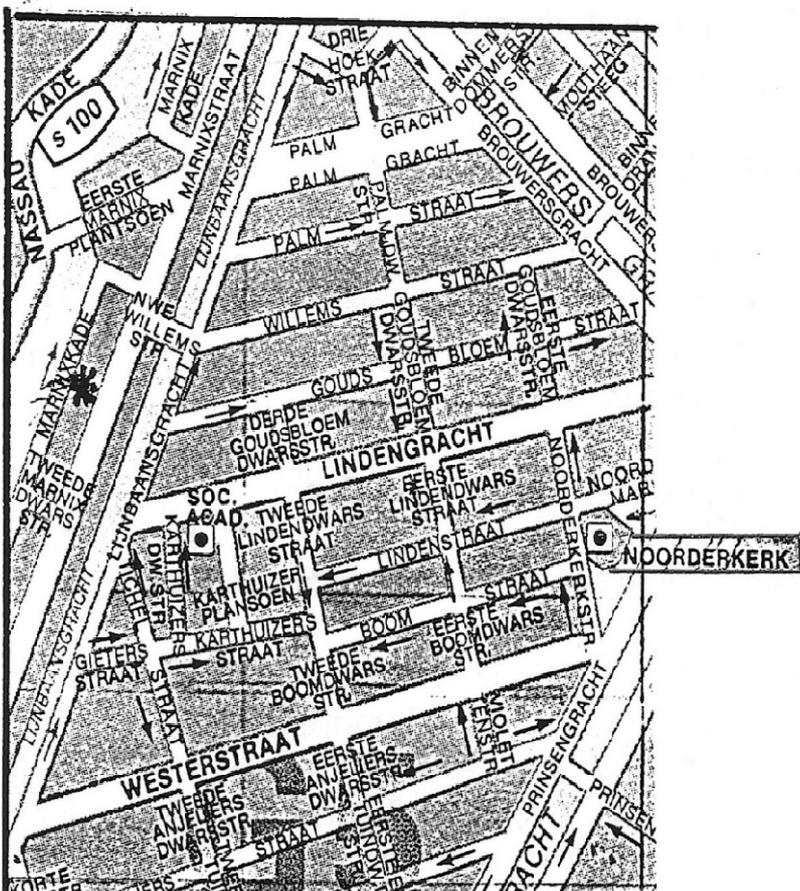
De haven van Dieppe kan je alleen binnenvaren van twee uur voor hoogwater tot twee uur na hoogwater omdat hij bij laagwater bijna geheel droog valt.

In de 'getijdentabel' hiernaast vind je precies hoe laat het hoogwater en laagwater is in Dieppe.

d. Op welke tijdstippen kon je Dieppe 's morgens bij vertrek uitvaren op 14 juli?

juli 1992 Dieppe

datum	hoogwater	laagwater
1 wo	11.15	06.15
	23.50	18.49
2 do	12.00	06.59
	-	19.39
3 vr	00.46	07.49
	12.56	20.26
4 za	01.37	08.39
	13.36	21.13
5 zo	02.27	09.19
	14.26	21.59
6 ma	03.05	10.04
	15.05	22.44
7 di	03.44	10.48
	15.55	23.22
8 wo	04.35	11.38
	16.40	-
9 do	05.17	00.19
	17.34	12.38
10 vr	06.25	01.18
	18.56	13.49
11 za	07.15	02.23
	19.55	15.03
12 zo	08.25	03.40
	20.54	06.18
13 ma	09.24	04.39
	21.54	17.19
14 di	10.26	05.29
	22.45	18.03
15 wo	11.06	06.14
	23.20	18.43
16 do	11.35	06.49
	23.56	19.19
17 vr	12.04	07.19
	-	19.48
18 za	00.14	07.49
	12.56	20.29
19 zo	00.54	08.18
	13.25	20.59
20 ma	01.25	08.53



1.6 Graaf in de stad

Ook van een plattegrond en een landkaart kan je een graaf tekenen.

Hiernaast zie je een stukje van de platte grond van Amsterdam. In sommige straten is *eenrichting-verkeer* zoals je aan de pijltjes ziet. Kijk maar eens naar de **Palmstraat**:

Je mag daar wel van de Lijnbaansgracht naar de Brouwersgracht rijden, maar niet andersom.

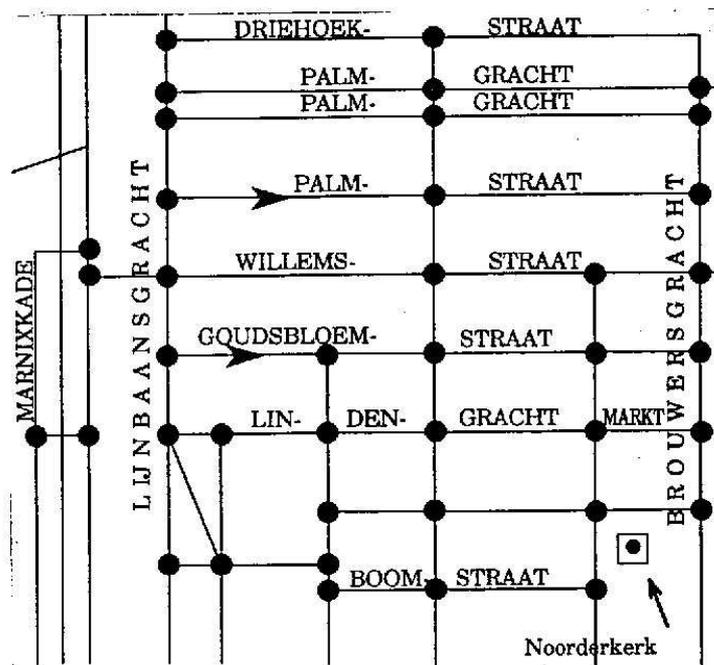
- De *Palmgracht* is twee keer getekend en er staan geen pijltjes. Hoeveel rijbanen heeft de Palmgracht dan in totaal?
- Hoeveel rijbanen heeft de Palmstraat?

Hieronder zie je een stukje van de bijbehorende graaf:

Verbindingen in de graaf zijn straten, knooppunten zijn wegkruisingen.

In een graaf zijn afstanden niet op schaal getekend en 'ware richtingen' kun je er ook niet uit aflezen.

Daarom zijn de hoeken tussen de straten gewoon recht getekend.



- Is het een *gerichte* graaf?
De Palmgracht staat ook in de graaf twee keer getekend.

Is dat wel nodig? Waarom?

- Kopieer de graaf en zet alle richtingspijlen (kaartje blz. 9) erin.

1.7. Routes plannen met een graaf

Je staat met je fiets op de hoek van de Brouwersgracht en de Goudsbloemstraat. Noem dat punt A. Je moet naar Marnixkade 125 (sterretje op de kaart).

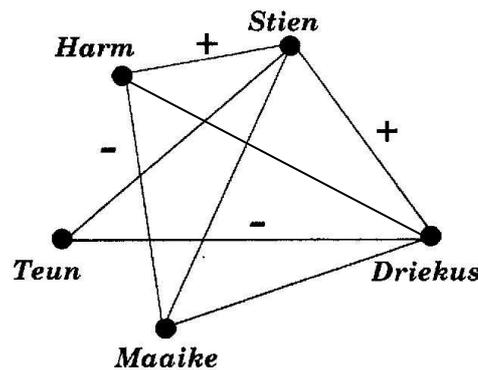
- Hoe ga je fietsen?
Kies de kortste route in je graaf.
- Hoe vaak ben je *linksaf* gegaan?
- Kan je dezelfde weg ook terugrijden?
Beschrijf de kortste weg die je terug mag rijden.
- De bewoner van Marnixkade 125 wil naar de Noorderkerk wandelen.
Teken de kortste route in je graaf
- Welke route kiest hij als hij met de fiets gaat?

1.8 Graaf in het gezin

De knopen van een graaf hoeven geen plaatsen te zijn en de verbindingen geen vaarwegen, autowegen of straten: knopen en hun verbindingen kunnen van alles zijn. In de figuur hieronder zijn een tabel en een graaf getekend van een boeregezin: boer Harm, zijn vrouw Stien, hun dochter Maaïke en de twee zonen Teun en Driekus.

In de knooppunten staan nu dus personen.

	Harm	Stien	Teun	Driekus	Maaïke
Harm					
Stien					
Teun		+			
Driekus	+		-		
Maaïke	-	+	0	+	



Harm en Stien kunnen goed met elkaar overweg, dat wordt in de **graaf** met het *plusje* aangegeven. Driekus en Teun zitten elkaar soms met een hark achterna: ze hebben vaak ruzie dat zie je in de graaf aan het *minnetje*. Tussen Teun en Maaïke loopt *geen lijntje*: Ze kunnen soms wel en soms niet goed met elkaar overweg. In de **tabel** staat daar een nulletje.

a. Vinden Stien en Driekus elkaar erg aardig? En Harm en Maaïke?

Neem graaf en tabel over in je schrift.

b. Zet alle plusjes en minnetjes in de graaf. Gebruik daarbij de tabel.

c. Maak nu ook de tabel af.

d. Wie is de liefste in het gezin? Waarom?

1.9 Belboom

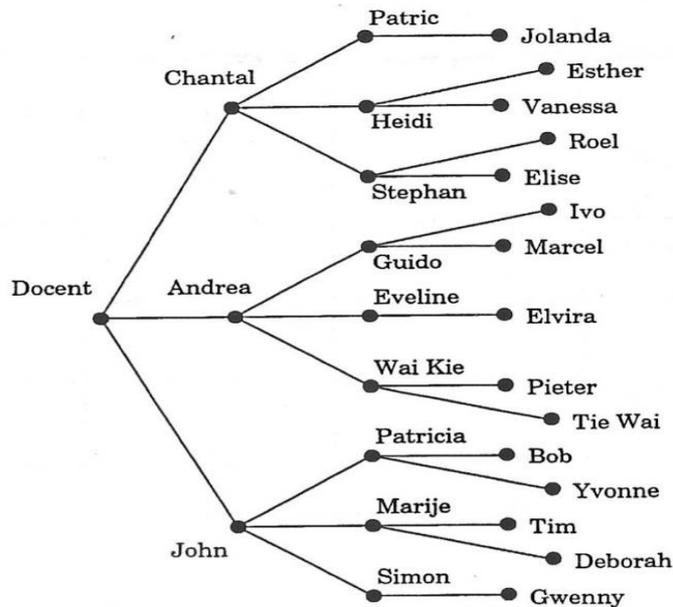
Op veel scholen maakte vroeger elke klas een 'telefoonketen' voor als er bijvoorbeeld een leraar ziek was. Zo'n bericht wil je natuurlijk graag zo snel mogelijk doorgeven, anders komen je klasgenoten misschien voor niets het eerste uur naar school.

Een telefoonketen noem je meestal '*belboom*' omdat hij wel wat op een boom met takken lijkt. Op de volgende bladzijde zie je de belboom van klas 2A van scholengemeenschap 'Jong en gelukkig'. Het is weer een graaf, nu met *leerlingen* in de *knooppunten* en telefoonverbindingen als de *wegen*.

a. Hoeveel leerlingen zitten er in die klas?

Chantal krijgt als eerste een prettig bericht door van de docent om 7.00 uur: het eerste uur komt te vervallen. Ze kruipt weer lekker in bed.
"Tijd genoeg om op te bellen" denkt ze.

b. Welke leerlingen moet Chantal opbellen?



c. Chantal verslaapt zich: ze komt zelfs het tweede uur nog te laat.

Welke leerlingen zijn 'voor niets' het eerste uur naar school gekomen?

Stel eens dat elk telefoontje een minuut duurt, en dat niemand zich verslaapt
De docent belde Chantal om 07.01, Andrea om 07.02 en John om 07.03

d. Hoe laat kan Jolanda de boodschap dan ontvangen?

Hoe laat kan Gwenny het bericht ontvangen? .

1.10 Volleybaltoernooi

Op de volgende bladzijde zie je een tabel met de resultaten van een volleybaltoernooi van vijf brugklassen. Er werd maar één set gespeeld, dus kon een klas winnen of verliezen, maar nooit gelijk spelen. (Einde van een set steeds bij 2 punten verschil).

Omdat alle klassen precies één keer tegen elkaar speelden, is *de wedstrijd*

1 B/ 1 A dezelfde als 1 A/ 1 B, maar voor de *uitslag*:

Als 1 B/ 1 A = 2/0 dan is 1 A/ 1 B = 0/2 dus 2 punten voor 1 B (rechter kolom).

In de notatie 1 B/ 1 A kies je dus 1 B uit de '*voorkolom*' (verticaal) en

1 A uit de '*koprij*' (horizontaal).

	1 A	1 B	1 C	1 D	1 E	punt en totaal
1 A		0				2 c
1 B	2/0 a)		2			
1 C	2/0	0/2 b)		2		
1 D	2/0	0/2	0/2			
1 E	0/2	0/2	2/0	0/2		

Toernooischema

Zo staat in hokje a) dat klas 1 B heeft gewonnen van 1 A, dus 2 punten voor 1 B en 0 punten voor 1 A .

In hokje b) zie je dat 1 C heeft verloren van 1 B, dus 0 punten voor 1 C en 2 punten. voor 1 B.

Deze punten zijn ingevuld in de rechterhelft van het schema, boven de geschaduwde cellen

a. Neem de figuur over.

b. Vul ook de andere hokjes in, maar *nog niet het puntentotaal rechts..*

Je kunt het puntentotaal van elke klas in het laatste hokje invullen.

Zo heeft 1 A twee punten behaald. Dat zie je staan in hokje c).

c. Vul zo ook van alle andere klassen het puntentotaal in.

d. Wie werden de nummers 1, 2 en 3 op dit toernooi? Met hoeveel punten elk?

Ook kan je van het toernooischema een gerichte graaf tekenen.

Het pijltje van 1 A naar 1 E betekent dat 1 A won van 1 E.

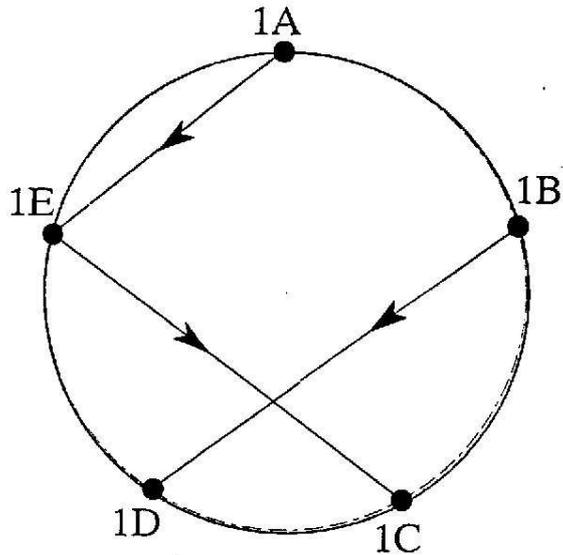
Een *vertrekkende pijl uit* 1 A,B,, E betekent een *winstpartij* voor 1 A,B,, E, (2 pnt.).

een *aankomende pijl in* 1 A,B,, E betekent een *verliespartij* voor 1 A,B,, E (0 pnt.).

Op de volgende bladzijde is al een stukje van die graaf getekend.

e. Neem de figuur over en maak de graaf af.

f. Controleer met de graaf of je antwoorden van b. kloppen.



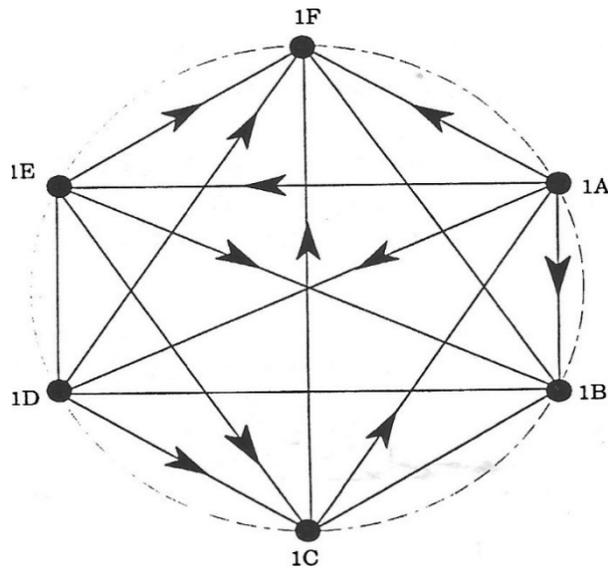
Stukje van een toernooigraaf

1.11. Een ander toernooi

Deze figuur stelt de volledige graaf voor van een klassen voetbaltoernooi. Ook hier speelde elke ploeg één keer tegen elkaar.

Een *vertrekkend pijltje* betekent *weer gewonnen*, een *aankomend pijltje* betekent *verlies* en *geen pijltje* betekent '*gelijkspel*'.

Elke gewonnen partij leverde twee punten op, gelijkspel leverde één punt.



Volledige toernooigraaf

a. Neem de tabel die hieronder staat over en vul alle waarden in :

klas	gewonnen	verloren	gelijkspel	totaal
1 A
1 B				
1 C				
1 D				
1 E				
1 F				

- b. Wie kreeg de eerste prijs?
Met hoeveel punten?
- c. Wie kreeg de tweede- en wie de derde prijs?
Met hoeveel punten elk ?
- d. Hoeveel wedstrijden werden er in totaal gespeeld?
- e. Hoe haal je dat antwoord uit de toernooigraaf?

Als je even naar het toernooischema van het volleybaltoernooi op blz. 13 kijkt, dan zie dat de vijf klassen 1 A t/m 1 E tien wedstrijden gespeeld hebben dus $5 \times (5 - 1) / 2$. Als elke klas 2× tegen andere klassen speelt ('uit/thuis' zoals bij voetbal), dan is het totaal aantal wedstrijden: *aantal klassen* × *aantal klassen* - 1

ONTHOUD:

***Een graaf is een figuur die bestaat uit een aantal wegen (verbindingen) en een aantal knooppunten (knopen).
Grafen worden getekend om een goed inzicht te krijgen in een gecompliceerde situatie.
Als in een graaf één of meer eenrichtingspijlen staan dan heet deze een gerichte graaf.
Staan er maten in de graaf zoals lengten van wegen dan heet deze een gewogen graaf.***

2. Teken en van een graaf

Waarover gaat deze paragraaf ?

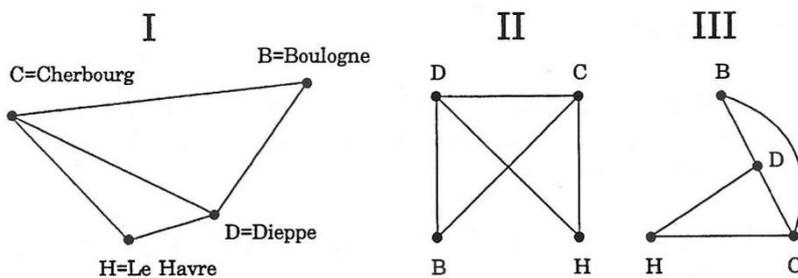
Hieronder zie je bij I nog eens de graaf van de Franse kustplaatsen:

De knooppunten zijn de havens, de lijnen stellen de verbindingen voor.

Als je nog even naar het kaartje van het gebied kijkt op blz. 6 dan zie je dat de knopen zijn getekend, zoals de havens in werkelijkheid ongeveer liggen.

Maar dat is helemaal niet nodig! Je kunt de graaf ook tekenen zoals daarnaast bij II of bij III. Wat is dan wel belangrijk bij het tekenen van een graaf en wat niet?

Daar kijken we eerst naar. Daarna lossen we echte puzzels op met een graaf.



2.1 Gelijke grafen

ONTHOUD

Bij een graaf gaat het er alleen om hoeveel knooppunten er zijn en hoeveel wegen daarvan met de andere punten zijn verbonden

Knooppunten mag je ook gewoon *knopen* noemen.

De verbindingen ‘wegen’ noem je ook wel *zijden* of *armen*.

In de figuur hierboven hebben de grafen I, II en III allemaal vier knopen en vijf verbindingen. Die aantallen zijn dus al gelijk, maar dat zegt natuurlijk niet genoeg. Cherbourg (C) is in graaf I verbonden met Le Havre (H), Dieppe (D) en Boulogne (B). Dat is bij de grafen II en III ook zo.

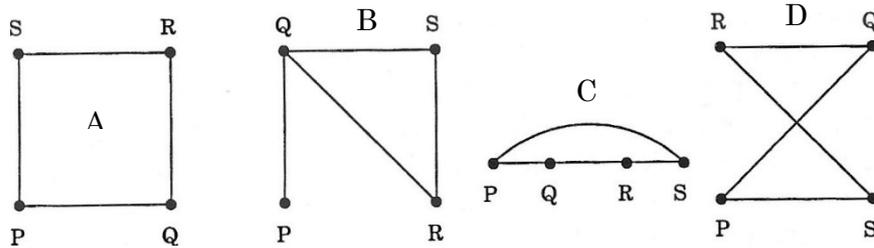
Vanuit Dieppe (D) lopen in alle drie verbindingen naar Le Havre (H) en Boulogne (B). Nergens loopt een lijn direct van B naar H.

Zo kun je nagaan dat de grafen I, II en III gelijkwaardig zijn.

In de volgende figuur is PQRS een graaf met vier knopen en vier zijden.

Het doet er niet toe wat hij voorstelt. Als je wilt mag je best aan vier steden P,Q,R en S denken met hun verbindingswegen.

Welke van de onderstaande grafen B, C en D zijn gelijk aan A?



Welke grafen zijn gelijk?

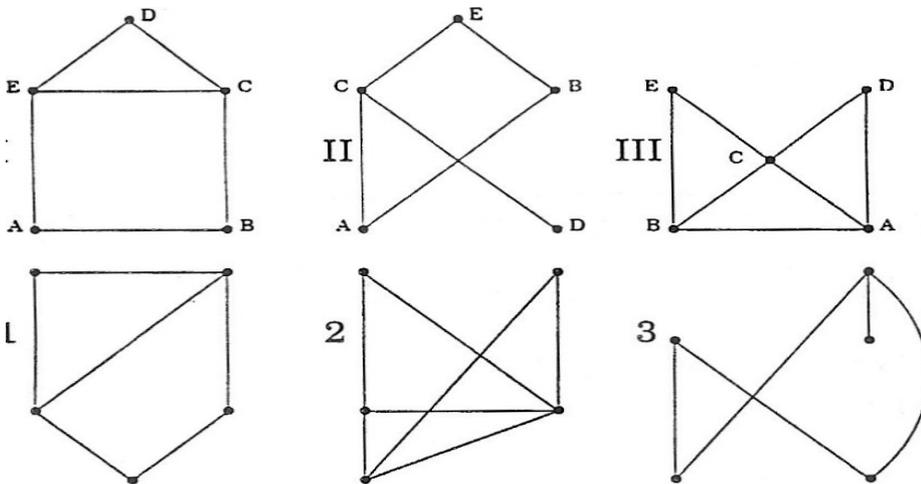
2.2. Grafen-paren

Hieronder zijn drie grafen I, II en III getekend, met letters bij de knooppunten.

Daaronder staan nog drie grafen 1, 2 en 3.

Van de zes grafen zijn er steeds twee aan elkaar gelijk.

- Zoek uit welke graaf gelijk is aan I, welke gelijk is aan II en welke gelijk is aan III.
- * Teken de drie onderste grafen over en zet de letters op hun juiste plaatsen als de grafen 1, 2 en 3 gelijk moeten zijn aan die van respectievelijk I, II en III



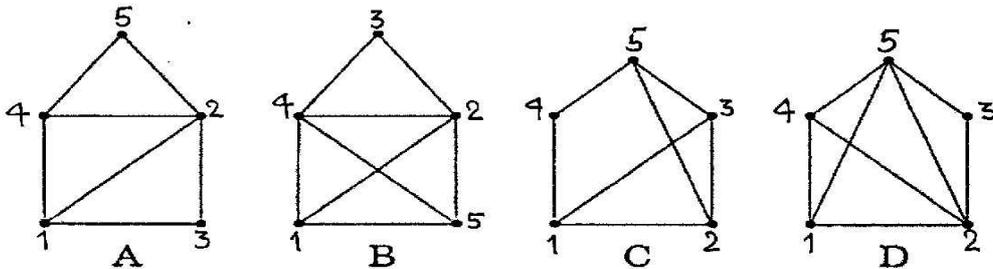
2.3 Tekenpuzzels

Kijk naar de vier grafen A, B, C en D van de volgende figuur.

Graaf A kun je met *één doorgaande potloodstreep* tekenen.

Je zet dus je potlood in zeker punt op papier en tekent de hele figuur, zonder het potlood ook maar één keer op te tillen, of twee keer langs eenzelfde lijn te gaan.

- a. Probeer het maar! Er zijn verschillende mogelijkheden.
Schrijf op hoe je het hebt gedaan, door de hoekpunten te nummeren.
Maakt het nog wat uit waar je begint?
- b. Ook graaf B kun je met één potloodstreep tekenen, zonder twee keer langs eenzelfde lijn te gaan. Dezelfde vragen als bij a
- c. Probeer het ook eens met de grafen C en D.



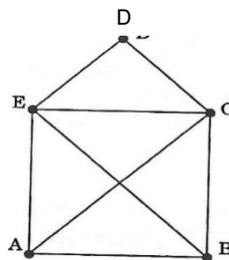
Raadsel opgelost!

Waarom lukken in de vorige som de puzzels A, B en D wel, maar C niet?
Zo ingewikkeld ziet graaf C er toch niet uit?

We gaan dat eens uitzoeken.

Hieronder is het huisje B uit de vorige serie nog eens getekend.

Bij de knopen staan nu letters.



Ononderbroken traject

- d. Tel eens in elk knooppunt hoeveel lijnen daar samenkomen.
Zet de getallen in een tabel zoals hieronder staat.

knooppunt	A	B	C	D	E
aantal lijnen	...				

Je ziet dat alleen in A en B een oneven aantal lijnen samenkomen en in alle andere punten een even aantal.

- e. Kan je de figuur ook met één doorlopende streep tekenen als je *niet* in A of B begint?

Stel je eens voor dat jij het potloodpuntje bent dat het huisje gaat tekenen. Je vertrekt uit knooppunt A. Bij elke knoop onderweg waarin je **aankomt**, moet je ook weer **vertrekken**. Dus heb je daar minstens twee lijnen nodig: één voor aankomst en één voor vertrek. Als je later diezelfde knoop nog eens aandoet heb je weer twee lijnen nodig: één voor aankomst en één voor vertrek. Dus in elke knoop *onderweg* moeten: twee, of vier, of zes, lijnen samenkomen, **altijd een even aantal** dus.

Maar hoe zit dat met begin- en eindpunt?

Uit beginpunt A kun je één keer vertrekken zonder er later weer te hoeven aankomen: Daar is dan één lijn minder nodig: daar mag dus een oneven aantal lijnen samenkomen. Ook in eindpunt B kun je één keer aankomen zonder daaruit weer te hoeven vertrekken, dus één lijn minder nodig: daar mag dus ook een oneven aantal lijnen samenkomen. Je ziet nu:

*Om een route ononderbroken te kunnen doorlopen waarbij je elk deel precies één keer passeert, moet in elk 'tussenknooppunt' een even aantal lijnen samenkomen: één voor aankomst en één voor vertrek.
In begin- en eindpunt van de route mag een oneven aantal lijnen samenkomen*

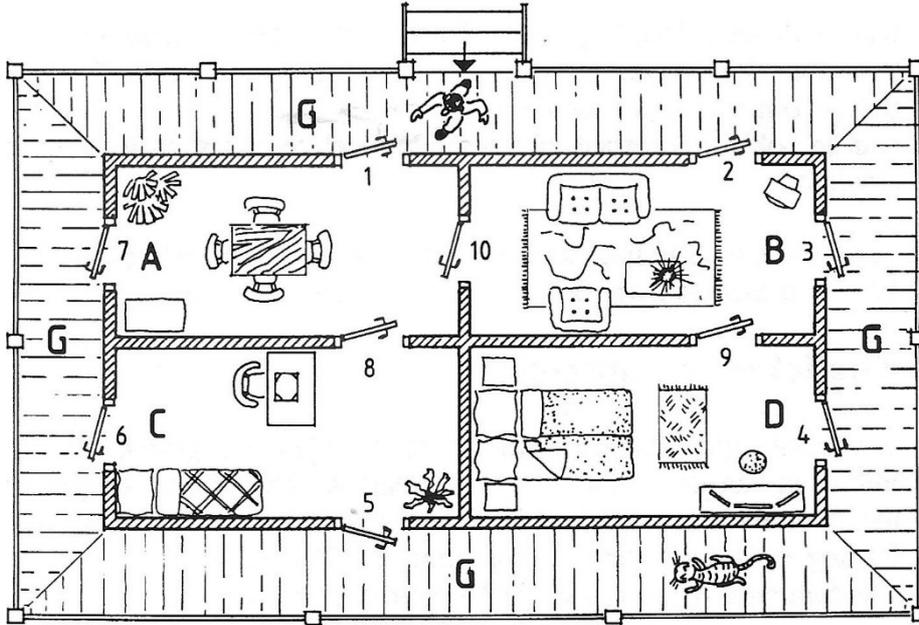
- f. Schrijf een volledige route op met vertrekpunt A.
Schrijf het zo op: ACDE... Is het eindpunt altijd B?
- g. Doe hetzelfde vanuit vertrekpunt B. Is het eindpunt altijd A?
- h. Teken graaf I op blz. 17 nog eens over maar teken daarin een extra lijn AC.
Kan je direct zeggen wat aankomst- en vertrekpunt nu moet zijn?
Schrijf twee routes. Begin in verschillende punten.

Gerard Gasbeton wil later echte huizen gaan bouwen, net als z'n vader, die aannemer is bij bouwbedrijf 'Steengelukkig' b.v. Hij vindt dat gemier met die potloodhuisjes maar niks. "Trek nou behalve AC ook nog even de lijn .. dan kun je beginnen en eindigen waar je maar wilt zegt hij.

- i. Welke lijn bedoelt Gerard? Zeg waarom hij gelijk heeft.

2.4. Gebouw(d) voor Gerard

"Heel goed Gerard" zegt de leraar. "Hier komt dan een puzzel speciaal voor jou. Je ziet een bungalow met vier kamers, A, B, C en D en een galerij G rondom. Alle kamers en de galerij zijn met elkaar verbonden door tien deuren. De opdracht luidt: Je moet alle kamers door en ook precies één keer door elke deur. Je mag in een kamer of op de galerij beginnen."



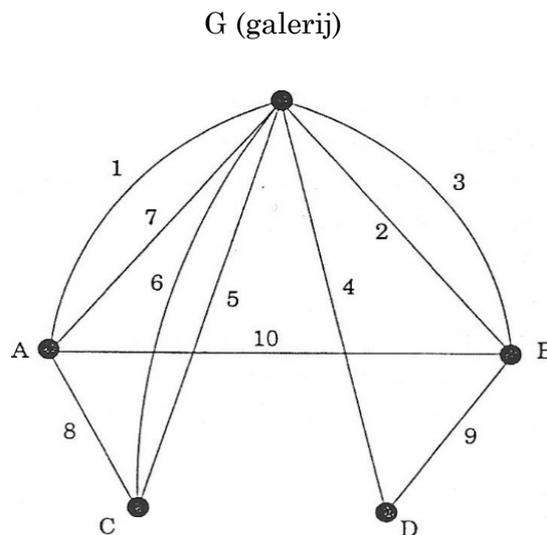
Probleem voor Gerard

“Zulke stomme dingen bouwt m’n vader niet”, zegt Gerard om een beetje tijd te rekken. Maar dat vindt hij zelf toch ook wel een beetje flauw.

a). Kopieer de figuur met de kamers A, B, C, D, de Galerij G en de deuren 1 t/m 10.

Hieronder is de graaf getekend die hoort bij het probleem

De *knopen* zijn de kamers A, B, C, D en de galerij G, de verbindingen zijn de deuren 1 t/m 10.



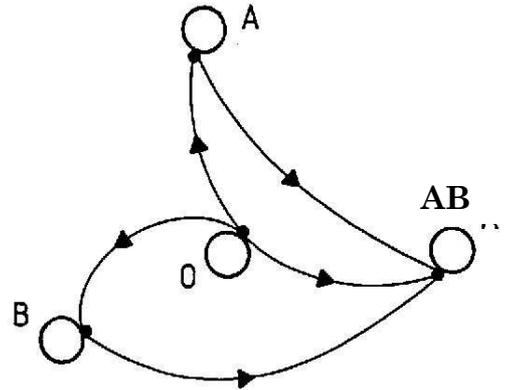
b). Tel in elk knooppunt (kamer of galerij) het aantal verbindingen (deuren).
Waarom lopen er vanuit A, C en B twee lijnen naar G?

- c. Kan je in één van de vier kamers beginnen? Zo ja in welke?
Schrijf een mogelijke route op.
- d. Kan je op de galerij beginnen? Zo ja geef dan een mogelijke route op.
- e. Kan je ook zonder graaf zien waar je kunt beginnen en waar je moet eindigen?

2.5-a Graaf en bloedgroepen

Niet alle mensen hebben hetzelfde bloed: Er bestaan vier verschillende 'bloedgroepen' A, B, AB en O.

Bij bloedtransfusies moet men daarmee terdege rekening houden: Als je bloedgroep A hebt kun je geen bloed ontvangen uit bloedgroep B. Als je bloedgroep O hebt kun je alleen maar bloed ontvangen van iemand met bloedgroep O. In de graaf hiernaast zie je wie aan wie bloed mag geven en wie van wie bloed mag ontvangen.



- a. Wat betekenen de cirkeltjes bij de knopen?
- b. Aan welke bloedgroep(en) mogen A, B, AB en O bloed geven?
- c. Van welke bloedgroep(en) mogen A, B, AB en O bloed ontvangen?
- d. Mensen met welke bloedgroep zou men bij de *bloedtransfusiedienst* het liefst als *donor* (bloedgever) hebben?
(Dienst die vrijwillige donoren oproept om bloed af te staan voor patiënten die nu of later bloedtransfusie nodig hebben.).
- e. Waarom ben je zelf minder gelukkig met die bloedgroep?

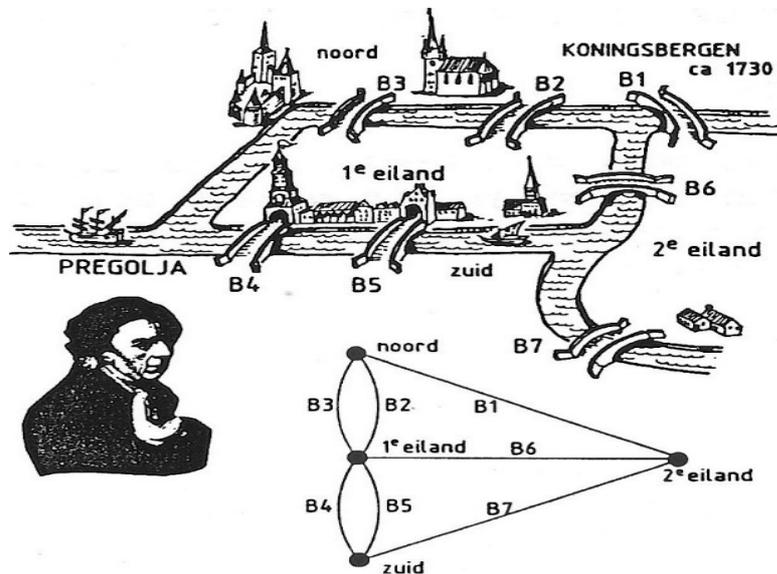
2.5-b Samenvatting van grafen

- Een graaf is een tekening die een overzichtelijk beeld geeft van een min of meer ingewikkelde situatie, bijvoorbeeld van plaatsen en hun verbindingswegen.
- De punten van een graaf heten *knooppunten* of *knopen*, de lijnen heten de *verbindingen* of *zijden*.
- Een graaf waarin richtingspijlvoorkomen heet een *gerichte graaf*.
- Hoe een graaf wordt getekend is niet belangrijk: Het gaat er alleen om hoeveel knooppunten er zijn en hoeveel daarvan met andere knopen zijn verbonden.
- Afstanden tussen twee knopen P en Q en de richtingen van PQ kunnen dus willekeurig worden gekozen, tenzij afstanden in een graaf zijn gegeven. In dat geval spreekt men van een *gewogen graaf*.
- Om een graaf in één doorgaande beweging te kunnen tekenen, zonder twee keer langs een zelfde lijn te gaan, moet in elke knoop een *even aantal lijnen* uitkomen. Alleen in een begin of eindpunt *mag* dat aantal *oneven zijn*.

2.6 Een wiswasje

Oostpruisen ± 1730. Door de stad Koningsbergen aan de Oostzee loopt de rivier de Pregolja, met daarin twee eilandjes.

Die twee eilandjes zijn door zeven bruggen met elkaar verbonden.



De zeven bruggen van Koningsbergen

Vele inwoners hebben bemerkt, dat het onmogelijk is om een wandeling te maken over alle zeven bruggen, zonder er minstens één twee keer te moeten passeren. Niemand begreep hoe dat komt. Het probleem wordt voorgelegd aan Leonhard Euler, een van de knapste en meest productieve wiskundigen die ooit leefden. Eigenlijk wilde Leonhard dominee worden, totdat zijn grote vriend Johan (Bernoulli, uit een beroemd geslacht van wis- en natuurkundigen) hem overhaalde wiskunde te gaan studeren. Euler denkt na en begint te tekenen: de twee eilanden en de twee stadsdelen Noord en Zuid als vier knooppunten, de bruggen als zeven verbindingen. De eerste **graaf** is dan ontstaan! Kijk goed hoe hij is getekend. Niet op de vorm letten, maar alleen op de verbindingen, dus de 7 bruggen tussen de twee eilanden. De oplossing die Euler daarna bedacht weet jij nu ook: In alle knooppunten komt een *oneven aantal lijnen* uit, dus is het netwerk nooit in één keer te doorlopen zonder een lijn (dus brug) twee keer te passeren. Maar Euler gaat verder met z'n grafen en vindt de beroemde formule voor niet inspringende veelvlakken, zoals bijvoorbeeld .de kubus: $\text{zijvlakken} + \text{hoekpunten} = \text{ribben} + 2$.

Een *nieuwe meetkunde* wordt nu geboren: de *topologie*. Als Euclides daarvan veel later had gehoord was hij zich vast alsnog doodgeschrokken. In de topologie bestaan geen afmetingen meer. Ook geen verschil tussen driehoek, vierhoek, cirkel en legpuzzel-stukje. Ze hebben allemaal één buitenkant en één binnenkant, dus kun je ze uit hetzelfde bonkje kauwgom kneden. 'Elastische meetkunde' noemt men de topologie daarom wel eens plagend. Een zeer verwonderende toepassing hiervan zijn de *Möbius Ringen*, maar daarvan hoor je misschien later nog wel eens.