Basislijn

Brugklaswiskunde voor vmbo, mavo, havo en vwo

Bij deze vernieuwde uitgave

Dit boek is een volledige herziening van de oorspronkelijke methode 'Basislijn' voor de Basisvorming Wiskunde van het vmbo/mavo en havo/vwo.
(Uitgeverij 'De Kangoeroe, Baarn 1994).
In dat jaar werd de Basisvorming ingevoerd, met '*Kerndoelen*' voor alle bestaande schoolvakken en de nieuwe vakken zoals techniek, handwerken, kunstgeschiedenis.
Belangrijke uitgangspunten voor de *kerndoelen van de wiskunde*, waren onder andere: Minder aandacht voor het 'zuivere letter rekenen', meer aandacht voor het rekenen van de basisschool, invoer van nieuwe onderwerpen zoals Grafen en Kijkmeetkunde. Ook aan de Geschiedenis van de wiskunde moest meer aandacht worden besteed en het vak zou in het algemeen wat meer 'vakoverstijgend' moeten worden, door er ook andere schoolvakken in te betrekken.
Van de 'Verzamelingenleer' werd bij de basisvorming definitief afscheid genomen, (vooral doordat deze te hoge eisen stelde aan het taalbegrip van veel leerlingen), en werd vervangen door de nieuwe 'Realistische Wiskunde'.
Hierin wordt bij voorkeur *praktisch toepasbare wiskunde stof* behandeld, zoals dat ook al geruime tijd gangbaar is bij de eindexamens.
Gedateerde - of anders onbruikbaar gebleken stof uit de eerdere uitgave is weggelaten maar de wat 'speels ogende' benadering' met plak- en knipwerk is in stand gebleven vanwege de belangrijke didactische betekenis.
De methode is door de concentrische behandeling van de stof zowel geschikt als klassikale lesmethode voor de eenjarige of tweejarige basisvorming in de brugklassen van respectievelijk havo/vwo en vmbo/mavo, als op zichzelf staande methode voor individueel gebruik.
De met een ster gemerkte opgaven zijn in principe voor havo en vwo.
Ook enkele 'Wiswasjes' bleven behouden en voor wat de naam WISWASJE betreft: WIS staat voor de associatie met *wis*kunde, WAS voor die met *geschiedenis* en WISWASJE *als geheel* is geassocieerd met *wissewasje,* omdat het onderwerp in dit leerstadium voor de wiskunde zelf, nog van ondergeschikte betekenis is.
Ik hoop dat deze uitgave aan de verwachtingen zal mogen voldoen en houd me voor opbouwende kritiek van harte aanbevolen.

Bij deze hernieuwde druk:

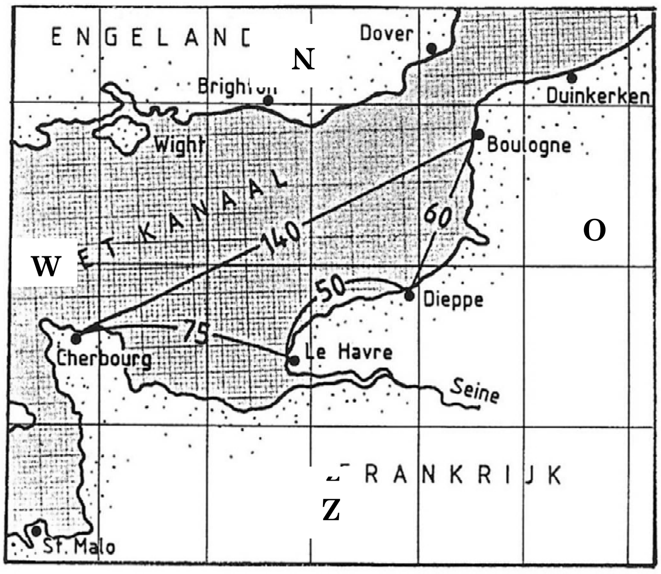
In deze nieuwe druk zijn enkele correcties aangebracht en in de antwoorden sommige figuren verduidelijkt.
Overigens is deze druk vrijwel geheel gelijk aan de vorige.

Inhoudsopgave

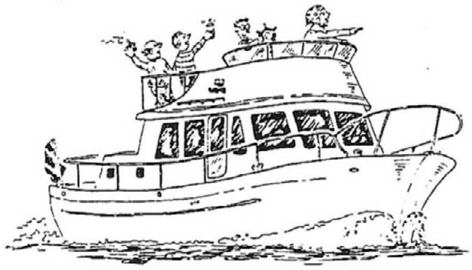
Carl, Friedrich Gauss, (1777–1855), geniaal wiskundige. Nauwelijks drie jaar oud betrapte hij zijn vader al op een foutieve optelling in loonlijsten. Gauss zal dan ook wel gelijk hebben als hij van zichzelf beweert de elementaire rekenregels al te hebben bedacht voordat hij goed kon praten. Gauss was dan ook een wonderkind, de 'Mozart van de Wiskunde'. Toen hij tien jaar oud was, gaf zijn onderwijzer die even de klas uit moest om een moeder te spreken, de klas de opdracht om te berekenen hoeveel de som was van de getallen 1 t/m 100. Nog voordat de onderwijzer het lokaal uit was gaf Kareltje Gauss het goede antwoord: **5050**.
Hoe kon dat?
Kareltje bedacht dat 1+99 = 2+98 = 3+97 = …. + 49+51 =100.
Totaal dus 49 × 100 =**4900**.
In het midden van die rij blijft dan nog **50** over en aan het eind van de rij nog **100**.
Totale som van de getallen 1 t/m 100 is dus 4900 + 50 + 100 = **5050.**

1. *Situaties in beeld*

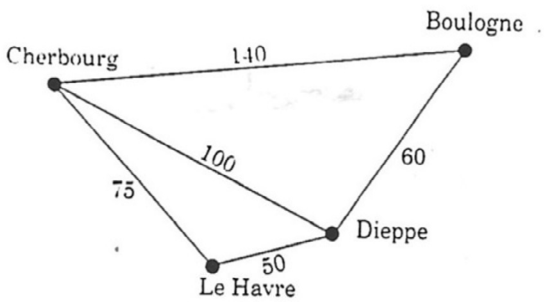
Met je snelle motorjacht wil je de zomervakantie doorbrengen aan de Normandische kust in Frankrijk. Een prachtig vaargebied met schilderachtige haventjes waarvan sommige bij laagwater 'droogvallen', omdat het water bij eb wel tien meter zakt .
Op het getekende kaartje zie je 'Het Kanaal' met langs de Franse kust de havenplaatsen Boulogne, Dieppe, Le Havre en Cherbourg.
Met zo'n kaartje krijg je al direct een aardig overzicht van de situatie.
Op echte zeekaarten vind je natuurlijk veel uitgebreider gegevens over waterdiepten, havens en vaarroutes.



	Boulogne	Dieppe	Le Havre	Cherbourg
Boulogne				
Dieppe	60			
Le Havre	90	50		
Cherbourg	140	100	75	



In de tabel staan alle afstanden in zeemijlen tussen de havens **over zee gemeten.**
Voor een routeplanning ,waarin het bijvoorbeeld om de keuze van een bepaald traject gaat, bestaat een speciale wiskundige figuur: een ***netwerk*** ofwel ***graaf.***



Van de situatie aan de Franse kust zie je zo'n graaf hiernaast:
Je tekent elke *plaats* als een *stip* en elke *verbinding* als een *lijntje* met soms hun afstand ertussen, hier dus het aantal (zee)mijlen uit de tabel.
Kaarten, tabellen, grafen zijn allemaal figuren die bepaalde situaties in beeld brengen.
'*Grafische hulpmiddelen'* worden ze genoemd, maar let wel :

In een graaf gaat het alleen om de punten en de wegen (verbindingen).
De afstanden daartussen hoeven niet op schaal te zijn getekend
Ook de hoeken tussen de wegen zijn willekeurig *gekozen*

Sommige gegevens haal je gemakkelijk uit de *graaf*, bijvoorbeeld hoeveel mijl een tocht langs alle vier de havenplaatsen is, en weke verschillende routes je zou kunnen volgen.
Voor andere zaken is de *tabel* weer duidelijker.
Om te zien dat je niet op automatische piloot rechtstreeks van Dieppe naar Boulogne moet proberen te gaan varen, kan je maar beter even op de kaart kijken.
Je wilt toch niet met je dure motorjacht een stuk afsnijden over land ?
Of riskeer je het maar dat je een Fransman met z'n Citroën in je schroef krijgt ?

Over kaarten en tabellen, maar vooral over grafen gaat dit eerste hoofdstuk.

1.1 *Werken met grafen*

Eerst ga je een paar grafen voor het samenstellen van toeristische routes gebruiken maar daarna zul je zien dat er veel grafen bestaan die niets met kaarten en verbindingswegen te maken hebben.

1.2 *Varen langs de Normandische kust*

Kijk naar de graaf op de vorige bladzijde. Er is geen *directe route* van Le Havre naar Boulogne of omgekeerd aangegeven: Je vaart altijd via Dieppe.(heeft met de tijd en het getij te maken.)

a. Welke verschillende rondreizen zijn er mogelijk met vertrek en aankomst in Dieppe?

b. Hoeveel mijl is een rondreis Dieppe-Cherbourg -Le Havre -Dieppe?
De gemiddelde snelheid van je motorjacht (rekening houdend met stroom) is 10 knopen (= 10 zeemijlen per uur). Hoe lang doe je over zo'n rondreis?

1.3. *Rondvaarten*

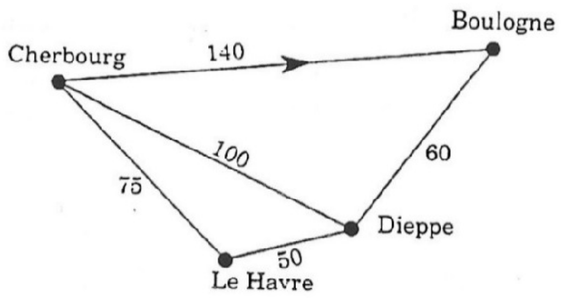
Na twee weken varen is je vakantiegeld al bijna op en Pa en Ma willen niet bijspringen.
Je besluit om trajecten te gaan varen met betalende passagiers.
Plaats van aankomst en vertrek is steeds Dieppe.

a. Hoeveel mijl is de langste rondvaart?
Hoeveel mijl is de kortste rondvaart ?

b*. Voor de kortste reis reken je € 540. Voor de langste reis reken je € 780.
"Merde, merde" zegt een wat driftige Franse passagier "De verschillen in prijs tussen het kortste en langste traject kloppen voor geen meter" .
Leg uit waarom die Fransman ongelijk heeft.

1.4. *Zeeziekte aan boord*

Op weg van Boulogne naar Cherbourg worden passagiers soms zeeziek doordat de wind meestal zuidwest is en je dan , ver uit de kust, bijna recht tegen de hoge golven vanuit Het Kanaal in moet varen. Kijk maar naar het kaartje op blz. 6 en let op **N**(oord) **O**(ost) **Z**(uid) en **W**(est).
Terug hebben de passagiers meestal geen last: Cherbourg-Boulogne gaat prima en ook op de andere trajecten wordt zelden iemand zeeziek. Je wilt daarom het traject tussen Cherbourg en Boulogne voortaan alleen in de '*prettige richting*' varen.
In de graaf hieronder zie je een pijl getekend waaruit je dat kunt aflezen.

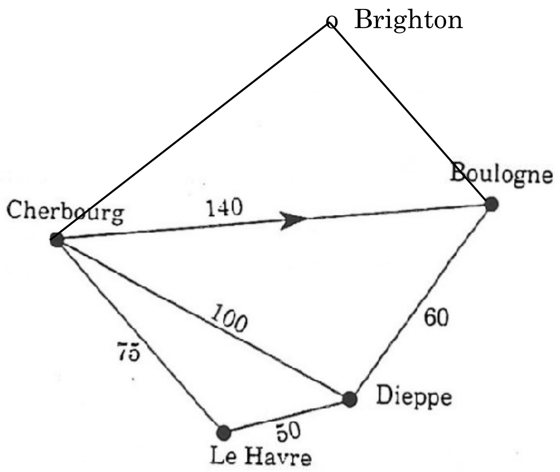


ONTHOUD

Een graaf waarin één of meer richtingspijlen voorkomen heet een gerichte graaf

1.5 . *Rondvaarten met een gouden randje*

Dieppe 14 juli. Vandaag, toch al een nationale feestdag in Frankrijk, stapt een rijke Amerikaan bij je aan boord. "Happy days are here again", want hij biedt $ 1000.- voor een rondvaart langs de vier Franse havenplaatsen, maar dan wil hij ook nog naar Brighton aan de Engelse kust om de beroemde krijtrotsen vanuit zee te zien. Hieronder is de graaf nogmaals getekend, nu met de havenplaats Brighton erbij



a. Het is mogelijk om de rondvaart . vanuit Boulogne te maken waarbij je zes trajecten precies één keer vaart. Welke route moet dan worden gevaren om weer in Boulogne aan te komen .
b. De lengten van de trajecten Boulogne-Brighton en Cherbourg-Brighton staan niet in de graaf, maar je kunt wel zeggen dat de som van die twee afstanden groter is dan 140 mijl. Waarom is dat zo?

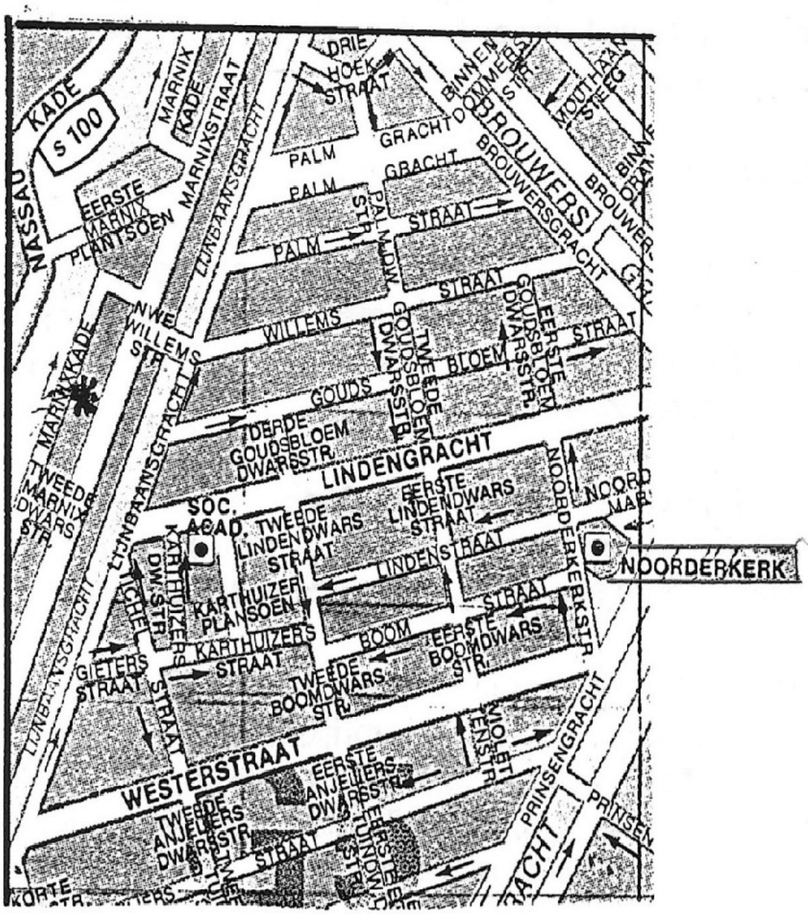
Je besluit nog dezelfde ochtend om 10 uur vanuit Dieppe naar Boulogne te varen, om *van daaruit* de rondreis met je Amerikaanse passagier te beginnen.
Je hebt inmiddels op de zeekaart gezien dat de afstand van Boulogne naar Brighton 70 mijl is en de afstand Brighton - Cherbourg 90 mijl.
c. Hoe lang gaat de hele rondreis duren als je 's nachts wil doorvaren ('wachtlopen' met je passagier) die na Boulogne in alle vier de havens twee uur foto's wil nemen voor thuis?

Als het donker is drinken ze wel wat, of gaan even slapen.
De haven van Dieppe kan je alleen binnenvaren van twee uur voor hoogwater tot twee uur na hoogwater omdat hij bij laagwater bijna geheel droog valt.
In de '*getijdentabel*' hiernaast vind je precies hoe laat het hoogwater en laagwater is in Dieppe.

d. Op welke tijdstippen kon je Dieppe 's morgens bij vertrek uitvaren op 14 juli?

juli 1992 Dieppe

datum	hoogwater	laagwater
1 wo	11.15 23.50	06.15 18.49
2 do	12.00 -	06.59 19.39
3 vr	00.46 12.56	07.49 20.26
4 za	01.37 13.36	08.39 21.13
5 zo	02.27 14.26	09.19 21.59
6 ma	03.05 15.05	10.04 22.44
7 di	03.44 15.55	10.48 23.22
8 wo	04.35 16.40	11.38 -
9 do	05.17 17.34	00.19 12.38
10 vr	06.25 18.56	01.18 13.49
11 za	07.15 19.55	02.23 15.03
12 zo	08.25 20.54	03.40 06.18
13 ma	09.24 21.54	04.39 17.19
14 di	10.26 22.45	05.29 18.03
15 wo	11.06 23.20	06.14 18.43
16 do	11.35 23.56	06.49 19.19
17 vr	12.04 -	07.19 19.48
18 za	00.14 12.56	07.49 20.29
19 zo	00.54 13.25	08.18 20.59
20 ma	01.25	08.53

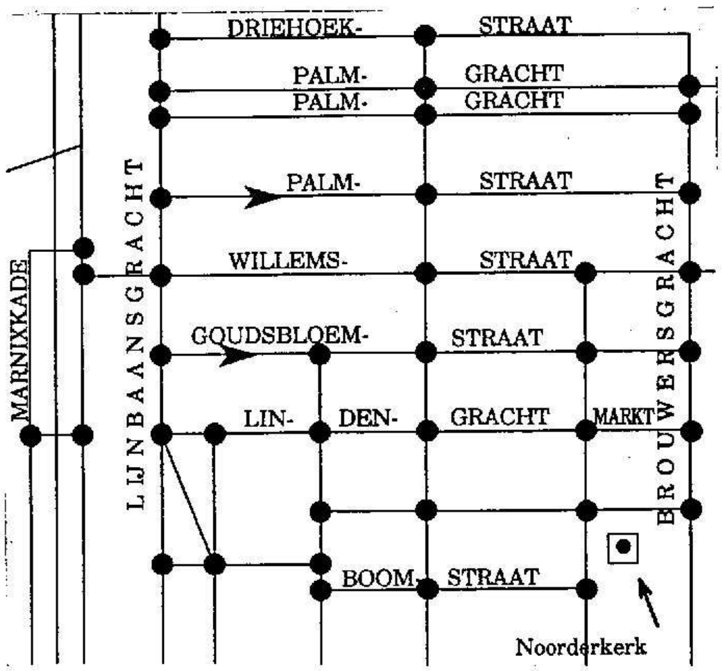


1.6 *Graaf in de stad*

Ook van een plattegrond en een landkaart kan je een graaf tekenen.
Hiernaast zie je een stukje van de platte grond van Amsterdam. In sommige straten is *eenrichting-verkeer* zoals je aan de pijltjes ziet. Kijk maar eens naar de ***Palmstraat***:
Je mag daar wel van de Lijnbaansgracht naar de Brouwersgracht rijden, maar niet andersom.

a. De *Palm**gracht*** is twee keer getekend en er staan geen pijltjes.
   Hoeveel rijbanen heeft de Palmgracht dan in totaal?
b. Hoeveel rijbanen heeft de Palmstraat?

Hieronder zie je een stukje van de bijbehorende graaf:
Verbindingen in de graaf zijn straten, knooppunten zijn wegkruisingen.
In een graaf zijn afstanden niet op schaal getekend en 'ware richtingen' kun je er ook niet uit aflezen.
Daarom zijn de hoeken tussen de straten gewoon recht getekend.



c. Is het een *gerichte* graaf?
. De Palmgracht staat ook in de graaf twee keer getekend.

Is dat wel nodig? Waarom?
e. Kopieer de graaf en zet alle richtingspijlen (kaartje blz. 9) erin.

1.7. Ro***utes plannen met een graaf***

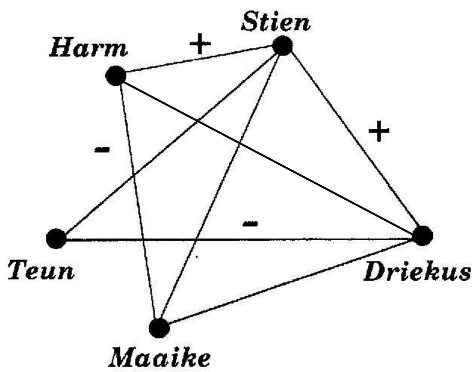
Je staat met je fiets op de hoek van de Brouwersgracht en de Goudsbloemstraat.
Noem dat punt A. Je moet naar Marnixkade 125 (sterretje op de kaart).

a. Hoe ga je fietsen?
   Kies de kortste route in je graaf.
b. Hoe vaak ben je *linksaf* gegaan?
c. Kan je dezelfde weg ook terugrijden?
   Beschrijf de kortste weg die je terug mag rijden.
d. De bewoner van Marnixkade 125 wil naar de Noorderkerk wandelen.
   Teken de kortste route in je graaf
e. Welke route kiest hij als hij met de fiets gaat?

1.8 *Graaf in het gezin*

De knopen van een graaf hoeven geen plaatsen te zijn en de verbindingen geen vaarwegen, autowegen of straten: knopen en hun verbindingen kunnen van alles zijn. In de figuur hieronder zijn een tabel en een graaf getekend van een boerengezin: boer Harm, zijn vrouw Stien, hun dochter Maaike en de twee zonen Teun en Driekus.
In de knooppunten staan nu dus personen.

	Harm	***Stien***	***Teun***	***Driekus***	***Maaike***
Harm					
Stien					
Teun		+			
Driekus	+		-		
Maaike	-	+	0	+	



Harm en Stien kunnen goed met elkaar overweg, dat wordt in de ***graaf*** met het *plusje* aangegeven. Driekus en Teun zitten elkaar soms met een hark achterna: ze hebben vaak ruzie dat zie je in de graaf aan het *minnetje*. Tussen Teun en Maaike loopt ***geen lijntje***: Ze kunnen soms wel en soms niet goed met elkaar overweg. In de ***tabel*** staat daar een nulletje.

a. Vinden Stien en Driekus elkaar erg aardig? En Harm en Maaike?

Neem graaf en tabel over in je schrift.

b. Zet alle plusjes en minnetjes in de graaf. Gebruik daarbij de tabel.

c. Maak nu ook de tabel af.

d. Wie is de liefste in het gezin? Waarom?

1.9 Belboom

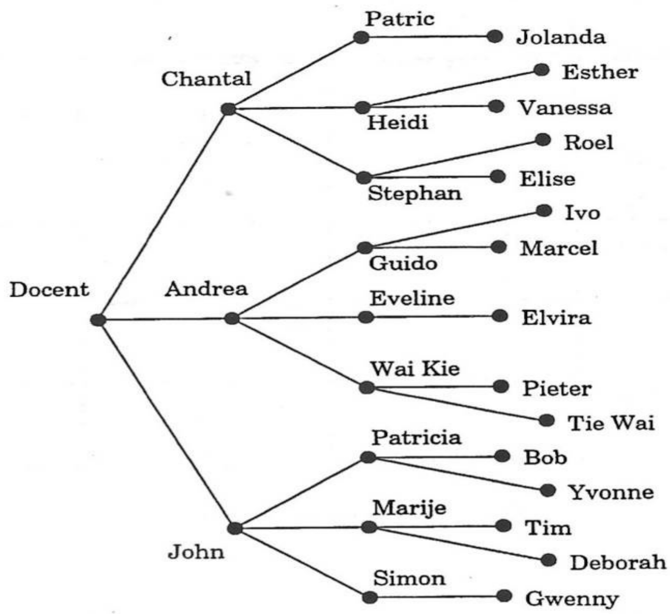
Op veel scholen maakte vroeger elke klas een 'telefoonketen' voor als er bijvoorbeeld een leraar ziek was. Zo'n bericht wil je natuurlijk graag zo snel mogelijk doorgeven, anders komen je klasgenoten misschien voor niets het eerste uur naar school.

Een telefoonketen noem je meestal '*belboom*' omdat hij wel wat op een boom met takken lijkt. Op de volgende bladzijde zie je de belboom van klas 2A van scholengemeenschap 'Jong en gelukkig'. Het is weer een graaf, nu met *leerlingen* in de *knooppunten* en telefoon*verbindingen* als de *wegen*.

a. Hoeveel leerlingen zitten er in die klas?

Chantal krijgt als eerste een prettig bericht door van de docent om 7.00 uur: het eerste uur komt te vervallen. Ze kruipt weer lekker in bed.
"Tijd genoeg om op te bellen" denkt ze.

b. Welke leerlingen moet Chantal opbellen?



c. Chantal verslaapt zich: ze komt zelfs het tweede uur nog te laat.
Welke leerlingen zijn 'voor niets' het eerste uur naar school gekomen?

Stel eens dat elk telefoontje een minuut duurt. en dat niemand zich verslaapt
De docent belde Chantal om 07.01 , Andrea om 07.02 en John om 07.03
d. Hoe laat kan Jolanda de boodschap dan ontvangen?
Hoe laat kan Gwenny het bericht ontvangen?

1.10 *Volleybaltoernooi*

Op de volgende bladzijde zie je een tabel met de resultaten van een volleybaltoernooi van vijf brugklassen. Er werd maar één set gespeeld, dus kon een klas winnen of verliezen, maar nooit gelijk spelen. (Einde van een set steeds bij 2 punten verschil).
Omdat alle klassen precies één keer tegen elkaar speelden , is *de wedstrijd* 1 B/ 1 A dezelfde als 1 A/ 1 B, maar voor de *uitslag*:
Als **1 B/ 1 A = 2/0** dan is **1 A/ 1 B = 0/2** dus 2 punten voor 1 B (rechter kolom).
In de notatie 1 B/ 1 A kies je dus 1 B uit de '***voorkolom***' (verticaal) en 1 A uit de '**koprij**' (horizontaal).

	1 A	1 B	1 C	1 D	1 E	punt en totaal
1 A		0				2 c
1 B	2/0 a)		2			
1 C	2/0	0/2 b)		2		
1 D	2/0	0/2	0/2			
1 E	0/2	0/2	2/0	0/2		

Toernooischema

Zo staat in hokje a) dat klas 1 B heeft gewonnen van 1 A, dus
2 punten voor 1 B en 0 punten voor 1 A .
In hokje b) zie je dat 1 C heeft verloren van 1 B, dus 0 punten voor 1 C
en 2 punten. voor 1 B.
Deze punten zijn ingevuld in de rechterhelft van het schema, boven de geschaduwde cellen

a. Neem de figuur over.

b. Vul ook de andere hokjes in, maar *nog niet het puntentotaal rechts.*.

Je kunt het puntentotaal van elke klas in het laatste hokje invullen.
Zo heeft 1 A twee punten behaald. Dat zie je staan in hokje c).

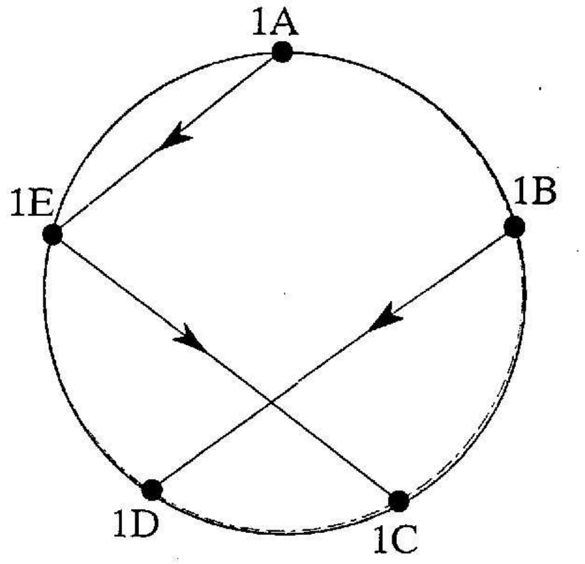
c. Vul zo ook van alle andere klassen het puntentotaal in.

d. Wie werden de nummers 1, 2 en 3 op dit toernooi? Met hoeveel punten elk?

Ook kan je van het toernooischema een gerichte graaf tekenen.
Het pijltje van 1 A naar 1 E betekent dat 1 A won van 1 E.
Een *vertrekkende pijl uit* 1 A,B,, E betekent een *winstpartij* voor 1 A,B,, E, (2 pnt.).
een *aankomende pijl in* 1 A,B,, E betekent een *verliespartij* voor 1 A,B,, E (0 pnt.).
Op de volgende bladzijde is al een stukje van die graaf getekend.

e. Neem de figuur over en maak de graaf af.

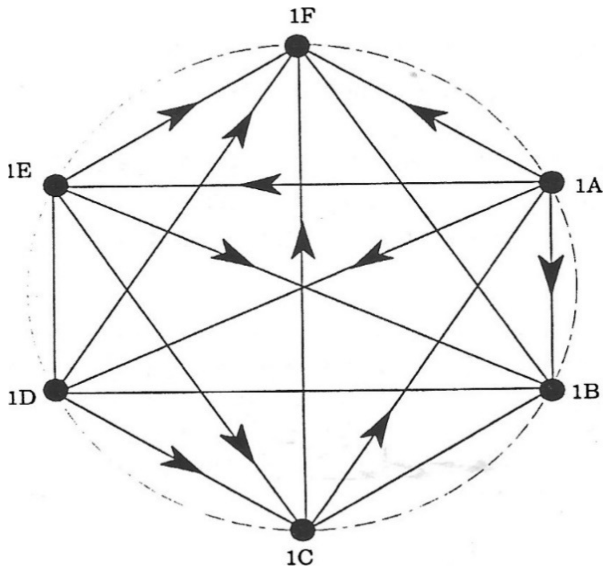
f. Controleer met de graaf of je antwoorden van b. kloppen.



Stukje van een toernooigraaf

1.11. *Een ander toernooi*

Deze figuur stelt de volledige graaf voor van een klassenvoetbaltoernooi.
Ook hier speelde elke ploeg één keer tegen elkaar.
Een *vertrekkend pijltje* betekent weer *gewonnen*, een *aankomend pijltje betekent verlies* en ***geen pijltje*** betekent ***'gelijkspel'***.
Elke gewonnen partij leverde twee punten op, gelijkspel leverde één punt.



Volledige toernooigraaf

a. Neem de tabel die hieronder staat over en vul alle waarden in :

klas	gewonnen	verloren	gelijkspel	totaal
1 A	. .	. .	..	..
1 B				
1 C				
1 D				
1 E				
1 F				

b. Wie kreeg de eerste prijs?
Met hoeveel punten?

c. Wie kreeg de tweede- en wie de derde prijs?
Met hoeveel punten elk ?

d. Hoeveel wedstrijden werden er in totaal gespeeld?

e. Hoe haal je dat antwoord uit de toernooigraaf?

Als je even naar het toernooischema van het volleybaltoernooi op blz. 13 kijkt, dan zie dat de vijf klassen 1 A t/m 1 E tien wedstrijden gespeeld hebben dus **5 × (5 −1) /2**. Als elke klas 2× tegen andere klassen speelt ('uit/thuis' zoals bij voetbal), dan is het totaal aantal wedstrijden: *aantal klassen* × *aantal klassen* −1

ONTHOUD:

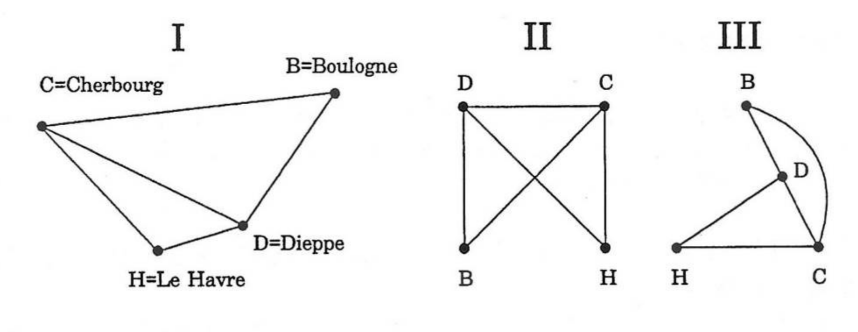
Een graaf is een figuur die bestaat uit een aantal wegen (verbindingen) en een aantal knooppunten (knopen).
Grafen worden getekend om een goed inzicht te krijgen in een gecompliceerde situatie.
Als in een graaf één of meer eenrichtingspijlen staan dan heet deze een gerichte graaf.
Staan er maten in de graaf zoals lengten van wegen dan heet deze een gewogen graaf.

2. *Tekenen van een graaf*

Waarover gaat deze paragraaf ?

Hieronder zie je bij I nog eens de graaf van de Franse kustplaatsen:
De knooppunten zijn de havens, de lijnen stellen de verbindingen voor.
Als je nog even naar het kaartje van het gebied kijkt op blz. 6 dan zie je dat de knopen zijn getekend, zoals de havens in werkelijkheid ongeveer liggen.

Maar dat is helemaal niet nodig! Je kunt de graaf ook tekenen zoals daarnaast bij II of bij III. Wat is dan wel belangrijk bij het tekenen van een graaf en wat niet? Daar kijken we eerst naar. Daarna lossen we echte puzzels op met een graaf.



2.1 *Gelijke grafen*

ONTHOUD

Bij een graaf gaat het er alleen om hoeveel knooppunten er zijn en hoeveel wegen daarvan met de andere punten zijn verbonden

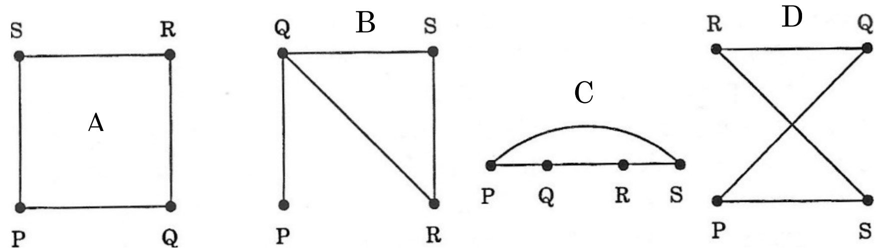
Knooppunten mag je ook gewoon *knopen* noemen.
De verbindingen 'wegen' noem je ook wel *zijden* of *armen.*

In de figuur hierboven hebben de grafen I, II en III allemaal vier knopen en vijf verbindingen. Die aantallen zijn dus al gelijk, maar dat zegt natuurlijk niet genoeg.
Cherbourg (C) is in graaf I verbonden met Le Havre (H), Dieppe (D) en Boulogne (B). Dat is bij de grafen II en III ook zo.
Vanuit Dieppe (D) lopen in alle drie verbindingen naar Le Havre (H) en Boulogne (B). Nergens loopt een lijn direct van B naar H.
Zo kun je nagaan dat de grafen I, II en III gelijkwaardig zijn.

In de volgende figuur is PQRS een graaf met vier knopen en vier zijden.

Het doet er niet toe wat hij voorstelt. Als je wilt mag je best aan vier steden P,Q,R en S denken met hun verbindingswegen.

Welke van de onderstaande grafen B, C en D zijn gelijk aan A?



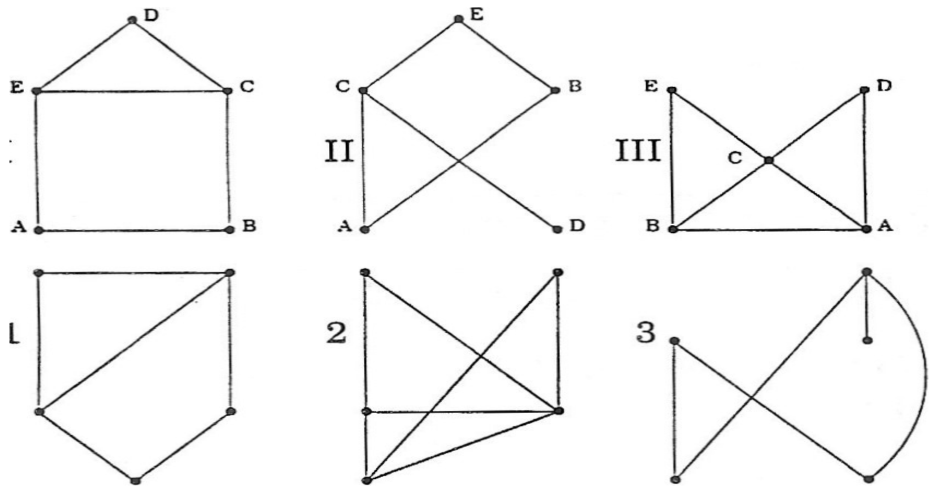
Welke grafen zijn gelijk?

2.2. *Grafen-paren*

Hieronder zijn drie grafen I, II en III getekend, met letters bij de knooppunten.
Daaronder staan nog drie grafen 1, 2 en 3.
Van de zes grafen zijn er steeds twee aan elkaar gelijk.

a. Zoek uit welke graaf gelijk is aan I, welke gelijk is aan II en welke gelijk is aan III.

b* Teken de drie onderste grafen over en zet de letters op hun juiste plaatsen als de grafen 1,2 en 3 gelijk moeten zijn aan die van respectievelijk I, II en III



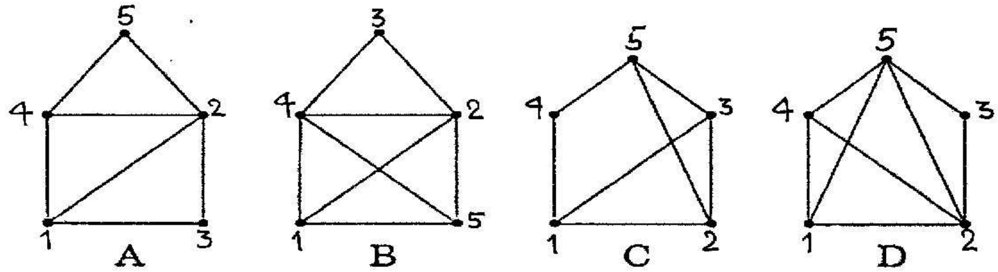
2.3 *Tekenpuzzels*

Kijk naar de vier grafen A, B, C en D van de volgende figuur.
Graaf A kun je met *één doorgaande potloodstreep* tekenen.
Je zet dus je potlood in zeker punt op papier en tekent de hele figuur, zonder het potlood ook maar één keer op te tillen, of twee keer langs eenzelfde lijn te gaan.

a. Probeer het maar! Er zijn verschillende mogelijkheden.
Schrijf op hoe je het hebt gedaan, door de hoekpunten te nummeren.
Maakt het nog wat uit waar je begint?

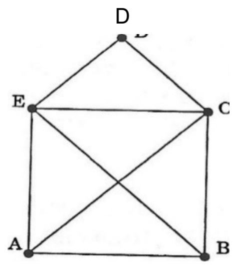
b. Ook graaf B kun je met één potloodstreep tekenen, zonder twee keer langs eenzelfde lijn te gaan. Dezelfde vragen als bij a

c. Probeer het ook eens met de grafen C en D.



Raadsel opgelost!

Waarom lukken in de vorige som de puzzels A, B en D wel, maar C niet?
Zo ingewikkeld ziet graaf C er toch niet uit?
We gaan dat eens uitzoeken.
Hieronder is het huisje B uit de vorige serie nog eens getekend.
Bij de knopen staan nu letters.



Ononderbroken traject

d. Tel eens in elk knooppunt hoeveel lijnen daar samenkomen.
Zet de getallen in een tabel zoals hieronder staat.

knooppunt	A	B	C	D	E
aantal lijnen	…				

Je ziet dat alleen in A en B een oneven aantal lijnen samenkomen en in alle andere punten een even aantal.

e. Kan je de figuur ook met één doorlopende streep tekenen als je *niet* in A of B begint?

Stel je eens voor dat jij het potloodpuntje bent dat het huisje gaat tekenen.
Je vertrekt uit knooppunt A. Bij elke knoop onderweg waarin je ***aankomt***, moet je ook weer ***vertrekken***. Dus heb je daar minstens twee lijnen nodig: één voor aankomst en één voor vertrek. Als je later diezelfde knoop nog eens aandoet heb je weer twee lijnen nodig: één voor aankomst en één voor vertrek.
Dus in elke knoop *onderweg* moeten: twee, of vier, of zes, lijnen samenkomen, ***altijd een even aantal*** dus.

Maar hoe zit dat met begin- en eindpunt?

Uit beginpunt A kun je één keer vertrekken zonder er later weer te hoeven aankomen: Daar is dan één lijn minder nodig: daar mag dus een oneven aantal lijnen samenkomen. Ook in eindpunt B kun je één keer aankomen zonder daaruit weer te hoeven vertrekken, dus één lijn minder nodig: daar mag dus ook een oneven aantal lijnen samenkomen. Je ziet nu:

Om een route ononderbroken te kunnen doorlopen waarbij je elk deel precies één keer passeert, moet in elk 'tussenknooppunt' een even aantal lijnen samenkomen: één voor aankomst en één voor vertrek.
In begin- en eindpunt van de route mag een oneven aantal lijnen samenkomen

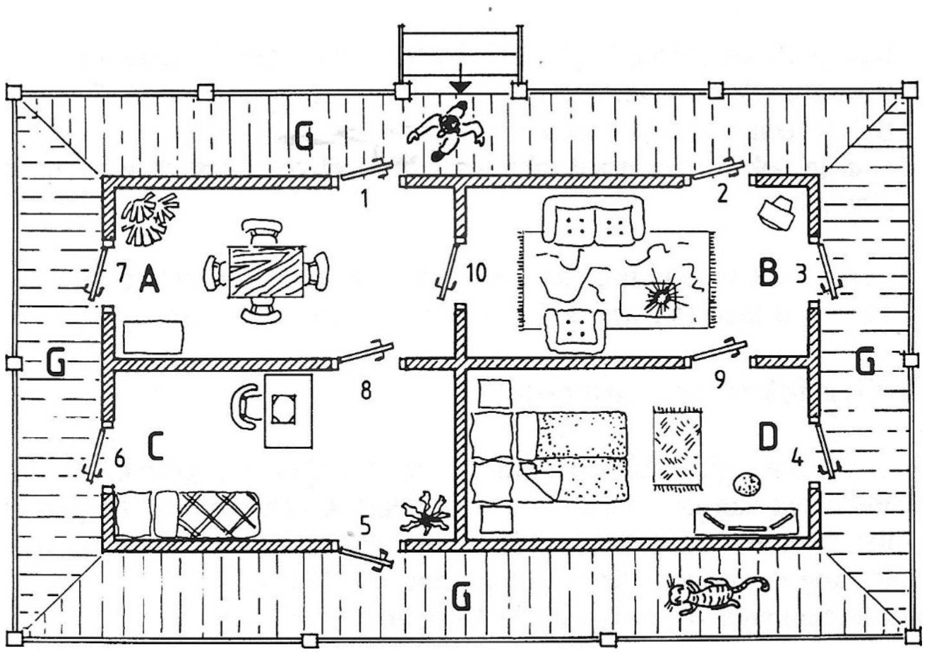
f. Schrijf een volledige route op met vertrekpunt A.
Schrijf het zo op: ACDE.... Is het eindpunt altijd B?
g. Doe hetzelfde vanuit vertrekpunt B. Is het eindpunt altijd A?

h. Teken graaf I op blz. 17 nog eens over maar teken daarin een extra lijn AC.
Kan je direct zeggen wat aankomst- en vertrekpunt nu moet zijn?
Schrijf twee routes. Begin in verschillende punten.

Gerard Gasbeton wil later echte huizen gaan bouwen, net als z'n vader, die aannemer is bij bouwbedrijf 'Steengelukkig' b.v. Hij vindt dat gemier met die potloodhuisjes maar niks. "Trek nou behalve AC ook nog even de lijn .. dan kun je beginnen en eindigen waar je maar wilt zegt hij.
i. Welke lijn bedoelt Gerard? Zeg waarom hij gelijk heeft.

2.4. *Gebouw(d) voor Gerard*

"Heel goed Gerard" zegt de leraar. "Hier komt dan een puzzel speciaal voor jou.
Je ziet een bungalow met vier kamers, A, B, C en D en een galerij G rondom.
Alle kamers en de galerij zijn met elkaar verbonden door tien deuren.
De opdracht luidt: Je moet alle kamers door en ook precies één keer door elke deur.
Je mag in een kamer of op de galerij beginnen."



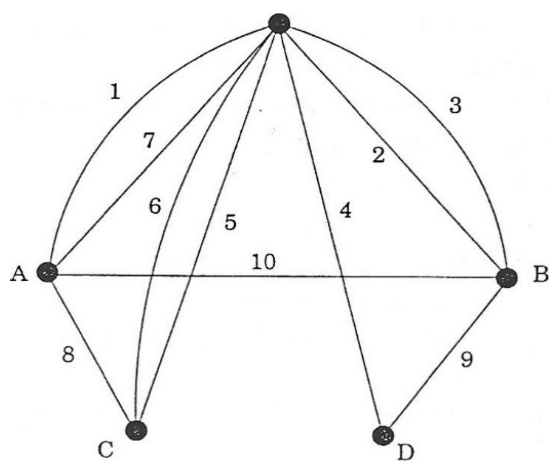
Probleem voor Gerard

“Zulke stomme dingen bouwt m’n vader niet”, zegt Gerard om een beetje tijd te rekken. Maar dat vindt hij zelf toch ook wel een beetje flauw.

a). Kopieer de figuur met de kamers A, B, C. D, de Galerij G en de deuren 1 t/m 10.

Hieronder is de graaf getekend die hoort bij het probleem
De *knopen* zijn de *kamers* A, B, C, D *en de galerij G,* de verbindingen zijn de deuren 1 t/m 10.

G (galerij)

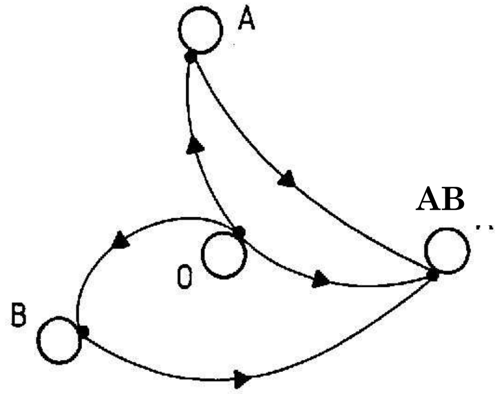


b). Tel in elk knooppunt (kamer of galerij) het aantal verbindingen (deuren).
Waarom lopen er vanuit A, C en B twee lijnen naar G ?

c. Kan je in één van de vier kamers beginnen? Zo ja in welke?
Schrijf een mogelijke route op.
d. Kan je op de galerij beginnen? Zo ja geef dan een mogelijke route op.
e. Kan je ook zonder graaf zien waar je kunt beginnen en waar je moet eindigen?

2.5-a *Graaf en bloedgroepen*

Niet alle mensen hebben hetzelfde bloed: Er bestaan vier verschillende 'bloedgroepen' A, B, AB en O.
Bij bloedtransfusies moet men daarmee terdege rekening houden: Als je bloedgroep A hebt kun je geen bloed ontvangen uit bloedgroep B. Als je bloedgroep O hebt kun je alleen maar bloed ontvangen van iemand met bloedgroep O
In de graaf hiernaast zie je wie aan wie bloed mag geven en wie van wie bloed mag ontvangen.



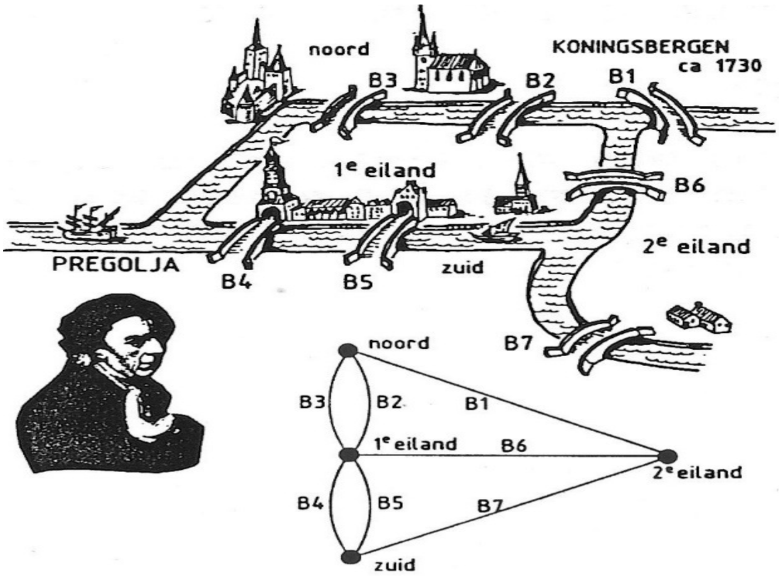
a. Wat betekenen de cirkeltjes bij de knopen?
b. Aan welke bloedgroep(en) mogen A, B, AB en O bloed geven?
c. Van welke bloedgroep(en) mogen A, B, AB en O bloed ontvangen?
d. Mensen met welke bloedgroep zou men bij de *bloedtransfusiedienst* het liefst als *donor* (bloedgever) hebben?
(Dienst die vrijwillige donoren oproept om bloed af te staan voor patiënten die nu of later bloedtransfusie nodig hebben.).
e. Waarom ben je zelf minder gelukkig met die bloedgroep?

2.5-b *Samenvatting van grafen*

- Een graaf is een tekening die een overzichtelijk beeld geeft van een min of meer ingewikkelde situatie, bijvoorbeeld van plaatsen en hun verbindingswegen.
- De punten van een graaf heten *knooppunten* of *knopen*, de lijnen heten de *verbindingen* of *zijden*
- Een graaf waarin richtingspijlenvoorkomen heet een *gerichte graaf*.
- Hoe een graaf wordt getekend is niet belangrijk: Het gaat er alleen om hoeveel knooppunten er zijn en hoeveel daarvan met andere knopen zijn verbonden.
- Afstanden tussen twee knopen P en Q en de richtingen van PQ kunnen dus willekeurig worden gekozen, tenzij afstanden in een graaf zijn gegeven.
In dat geval spreekt men van een *gewogen graaf*.
- Om een graaf in één doorgaande beweging te kunnen tekenen, zonder twee keer langs een zelfde lijn te gaan, moet in elke knoop een *even aantal lijnen* uitkomen. Alleen in een begin of eindpunt *mag* dat aantal *oneven zijn.*

2.6 *Een wiswasje*

Oostpruisen ± 1730. Door de stad Koningsbergen aan de Oostzee loopt de rivier de Pregolja, met daarin twee eilandjes.
Die twee eilandjes zijn door zeven bruggen met elkaar verbonden.



De zeven bruggen van Koningsbergen

Vele inwoners hebben bemerkt, dat het onmogelijk is om een wandeling te maken over alle zeven bruggen, zonder er minstens één twee keer te moeten passeren. Niemand begreep hoe dat komt. Het probleem wordt voorgelegd aan Leonhard Euler, een van de knapste en meest productieve wiskundigen die ooit leefden. Eigenlijk wilde Leonhard dominee worden, totdat zijn grote vriend Johan (Bernoulli, uit een beroemd geslacht van wis- en natuurkundigen) hem overhaalde wiskunde te gaan studeren. Euler denkt na en begint te tekenen: de twee eilanden en de twee stadsdelen Noord en Zuid als vier knooppunten, de bruggen als zeven verbindingen. De eerste ***graaf*** is dan ontstaan! Kijk goed hoe hij is getekend. Niet op de vorm letten, maar alleen op de verbindingen, dus de 7 bruggen tussen de twee eilanden. De oplossing die Euler daarna bedacht weet jij nu ook: In alle knooppunten komt een *oneven aantal lijnen* uit, dus is het netwerk nooit in één keer te doorlopen zonder een lijn (dus brug) twee keer te passeren. Maar Euler gaat verder met z'n grafen en vindt de beroemde formule voor niet inspringende veelvlakken, zoals bijvoorbeeld .de kubus: *zijvlakken* + *hoekpunten* = *ribben* + 2.
Een *nieuwe meetkunde* wordt nu geboren: de *topologie*. Als Euclides daarvan veel later had gehoord was hij zich vast alsnog doodgeschrokken. In de topologie bestaan geen afmetingen meer. Ook geen verschil tussen driehoek, vierhoek, cirkel en legpuzzel-stukje. Ze hebben allemaal één buitenkant en één binnenkant, dus kun je *ze uit hetzelfde bonkje kauwgom kneden.* 'Elastische meetkunde' noemt men de topologie daarom wel eens plagend. Een zeer verwonderende toepassing hiervan zijn de *Möbius Ringen*, maar daarvan hoor je misschien later nog wel eens.